פתרון תרגיל 3

1. (א) צ"ל: $\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(1-3n^2\right)=-\infty$

הוכחה: בהינתן $M\in\mathbb{R}$ ניקח $n_0=\begin{cases}1 & M>1\\ \lceil\sqrt{\frac{1-M}{3}}\rceil+1 & M\leq 1\end{cases}$
ואז לכל $n\geq n_0$ טבעי יתקיים $1-3n^2<M$.

אכן, אם $M>1$ אז לכל $n\geq 1$ מתקיים $1-3n^2<1<M$,

ואם $M\leq 1$, אז לכל $n\geq\lceil\sqrt{\frac{1-M}{3}}\rceil+1$ מתקיים בפרט $n>\sqrt{\frac{1-M}{3}}$ ולכן

$$1-3n^2<1-3\cdot\left(\sqrt{\frac{1-M}{3}}\right)^2=1-3\cdot\frac{1-M}{3}=1-(1-M)=M$$

(ב) צ"ל: $\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n+1}{3+sin(\sqrt{n}+1)}=\infty$.

הוכחה: יהי $M\in\mathbb{R}$ כלשהו. ניקח $n_0=max\{1,\lceil 2M\rceil\}\in\mathbb{N}$, ואז לכל $n\geq n_0$ טבעי יתקיים:

$$\frac{2n+1}{3+sin(\sqrt{n}+1)}>\frac{2n}{3+1}=\frac{n}{2}\geq\frac{n_0}{2}\geq\frac{\lceil 2M\rceil}{2}\geq\frac{2M}{2}=M$$

(ג) צ"ל: $\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}}=\infty$.

הוכחה: יהי $M\in\mathbb{R}$ כלשהו. ניקח $n_0=\begin{cases}1 & M<0\\ \lceil 7M^2\rceil & M\geq 0\end{cases}$, ואז לכל $n\geq n_0$ טבעי יתקיים
$\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}}>M$.

אכן, אם $M<0$ אז לכל $n\geq 1$ מתקיים $\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}}>0>M$,
ואם $M\geq 0$ אז לכל $n\geq\lceil 7M^2\rceil$ מתקיים

$$\sqrt{\frac{n^2+3}{2n+5}}>\sqrt{\frac{n^2}{2n+5n}}=\sqrt{\frac{n}{7}}\geq\sqrt{\frac{\lceil 7M^2\rceil}{7}}\geq\sqrt{\frac{7M^2}{7}}=\sqrt{M^2}=M$$

2. (א)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{6n^3-5n+7}{3n^3+n^2+1}\right)^4=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{5}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}\right)^4=\left(\frac{6-0+0}{3+0+0}\right)^4=16$$

(ב)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot[(n+1)-1]}{n!\cdot[(n+1)+1]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$$

(ג)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+5}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+5}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{(n+5)-n}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=$$

$$=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{5}{\frac{\sqrt{n+5}}{\sqrt{n}}+1}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}=\frac{5}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{5}{2}$$

(ד)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2^n+3^n}{6\cdot 2^n+2\cdot 3^{n-1}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2^n+3^n}{3^n}}{\frac{6\cdot 2^n+2\cdot 3^{n-1}}{3^n}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3}}=\frac{0+1}{6\cdot 0+\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$$

3. הסדרה $\{a_n\}$ חיובית $\Leftarrow L\geq 0$, $4a_n+1\neq 0$ לכל n טבעי, וכן $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n+1)=4L+1\neq 0$.
לכן עפ"י כללי האריתמטיקה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+3a_n}{4a_n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+3a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(4a_n+1)}=\frac{L^2+3L}{4L+1}$$

מהנתון הנוסף גבול זה הוא 1, ז"א $\frac{L^2+3L}{4L+1}=1 \Leftarrow L^2+3L=4L+1 \Leftarrow L^2-L-1=0 \Leftarrow$
$L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ או $L=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. אבל כפי שראינו $L\geq 0$ ולכן $\boldsymbol{L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

4. (א) נסמן $a_n=n+1$. מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ולכן

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{1}=1$$

(ב) נסמן $a_n=2+\sqrt[3]{n}$. מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\sqrt[3]{n+1}}{2+\sqrt[3]{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}}{\frac{2}{\sqrt[3]{n}}+1}=\frac{0+\sqrt[3]{1+0}}{0+1}=1$$

ולכן $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{a_n}=1=\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sqrt[n]{2+\sqrt[3]{n}}$

(ג) נסמן $a_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$. מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}\cdot\frac{n!^2}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!^2(n+1)^2}\cdot\frac{n!^2}{(2n)!}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(2n+1)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4$$

ולכן $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a_n} = 4$

5. (א) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $|sin(n)|, |cos(2n)| \leq 1$ ואם $n > 1$:

$$\frac{2n-1}{n+1} \leq \frac{2n+sin(n)}{n+cos(2n)} \leq \frac{2n+1}{n-1}$$

$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2$,$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n+1}{n-1} = 2$ ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n+sin(n)}{n+cos(n)} = 2$.

(ב) $0 < a < b < c$, לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$c = \sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \leq \sqrt[n]{c^n+c^n+c^n} = \sqrt[n]{3c^n} = \sqrt[n]{3}\cdot c$$

נשים לב ש־$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{3}\cdot c = 1\cdot c = c$, ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} = c$.

(ג) לכל $2 < n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 \leq \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdots\frac{2}{n} \leq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{3}}_{n-2\ times} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$$

ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

(ד) נשים לב שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|cos(4n)| \leq 1$ ולכן

$$\left|\frac{2^n\cdot cos(4n)}{(2n)!}\right| \leq \frac{2^n}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{n!}$$

ומכאן ש־

$$-\frac{2^n}{n!} \leq \frac{2^n\cdot cos(4n)}{(2n)!} \leq \frac{2^n}{n!}$$

לפי הסעיף הקודם $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ ולכן גם $\lim_{n\longrightarrow\infty} -\frac{2^n}{n!} = 0$,

ועפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2^n\cdot cos(4n)}{n!} = 0$.

(ה) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}}_{n+1\ times} = \frac{n+1}{n^2} \to 0$$

ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.

(ו) לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$0 \leq \sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n} \leq \sqrt[4]{n}\cdot(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} - 1) \leq \sqrt[4]{n}\cdot[(1+\frac{1}{n}) - 1] = \sqrt[4]{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\frac{3}{4}}} \to 0$$

ולכן עפ"י כלל הסנדוויץ': $\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right) = 0$.