atian@walla.com
85% מבחן, 15% בוחן מגן

## מרחבים מטריים

<u>הגדרה</u>: תהי $M$ קב' כלשהי ונניח שנתונה פונק' $d: M\times M \to [0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall_{x,y\in M}:\ x=y \iff d(x,y)=0$
2. $\forall_{x,y\in M}:\ d(x,y)=d(y,x)$
3. $\forall_{x,y,z\in M}:\ d(x,y)\le d(x,z)+d(y,z)$

<u>דוגמאות</u>:

1. בדיסקרטי - $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$
2. ב-$\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$
3. המטריקה ה-p אדית על $\mathbb{Z}$ מוגדרת (עבור $p$ ראשוני) ע"י: $d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$
כאשר - $k(x,y)=\max\{i \mid p^i|(x-y)\}$

לדוג': $d_5(17,12)$ - $5^0,5^1|(17-12)$ אבל $5^2\nmid(17-12)$ לכן $k(17,12)=1$ אז $d_5(17,12)=\frac{1}{5}$.

<u>תרגיל</u>: תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונק'. הוכח $f$ חח"ע $\iff$ $d(a,b)=|f(a)-f(b)|$ הוא מטריקה על $\mathbb{R}$.

$\Leftarrow$ נניח $f$ חח"ע. נראה שהפונק' $d$ אכן מטריקה.

1. $d(a,b)=0 \iff |f(a)-f(b)|=0 \iff f(a)=f(b) \overset{f \text{ חח"ע}}{\iff} a=b$.
2. $d(a,b)=|f(a)-f(b)|=|f(b)-f(a)|=d(b,a)$
3. $d(a,b)=|f(a)-f(b)|\le|f(a)-f(c)|+|f(c)-f(b)|=d(a,c)+d(b,c)$

$\Rightarrow$ באותו אופן.

<u>לדוגמא</u>: $d(x,y)=|x^2-y^2|$ - הפונק' $f(x)=x^2$ לא חח"ע ב-$\mathbb{R}$ ו-$d$ אינה מטריקה (כי לדוג' - $d(1,-1)=0$).

$d(x,y)=|x^5-y^5|$ - הפונק' $f(x)=x^5$ חח"ע ב-$\mathbb{R}$ ו-$d$ מטריקה.

הגדרה: יהי $X$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ (אפשר גם להגיד מעל כל שדה $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$).
נגדיר פונק' $\|\cdot\| : X\to[0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall v\in X: \|v\|=0 \iff v=0$
2. $\forall \alpha\in\mathbb{F}, v\in X: \|\alpha v\|=|\alpha|\cdot\|v\|$
3. $\forall u,v\in X: \|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

$\|\cdot\|$ נקראת $\boxed{\text{נורמה}}$ ו-$(X,\|\cdot\|)$ נקרא $\boxed{\text{מרחב נורמי}}$.

הערה: כל נורמה משרה מטריקה $d(x,y)=\|x-y\|$.

תרגיל: נסמן $\ell_\infty=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n\in\mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n<\infty\}$ סדרות ממשיות חסומות.
הוכח שהפונק' $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|=\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$ היא נורמה על $\ell_\infty$.

פתרון: נסמן $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. נראה שתכונות הנורמה מתקיימות:

1. אם $x=\vec{0}=(0,0,\dots)$ אז $\|x\|=0$.
מצד שני, ברור שאם $0=\|x\|=\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$ אז $x=\vec{0}$.
2. $\|\alpha x\|=\sup\{|\alpha x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}=\sup\{|\alpha|\cdot|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}=|\alpha|\cdot\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}=|\alpha|\cdot\|x\|$
3. נשים לב ש- $\forall m\in\mathbb{N}, |x_m+y_m|\le|x_m|+|y_m|\le\sup\{|x_n| \mid n\in\mathbb{N}\}+\sup\{|y_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$
ומתכונת סופרימום (אי-השוויון נכון לכל $m\in\mathbb{N}$): $\sup\{|x_n+y_n| \mid n\in\mathbb{N}\}\le\|x\|+\|y\|$
ולכן - $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ ולכן זו נורמה.

הגדרה: במרחב מטרי $(X,d)$, יהי $A\subseteq X$ ו- $x\in X$. המרחק של $x$ מ-$A$: $d(x,A)=\inf_{a\in A}(d(x,a))$

תרגיל: הוכיחו שמתקיים: $A\subseteq X$ , $x,y\in X$: $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$

פתרון: $d(x,A)=\inf_{a\in A}\{d(x,a)\}\le\inf_{a\in A}\{d(x,y)+d(y,a)\}$ לפי א"ש המשולש של $d$- $d(x,a)\le d(x,y)+d(y,a)$
כמו כן - $d(x,A)\le\inf_{a\in A}\{d(x,y)+d(y,a)\}=d(x,y)+\inf_{a\in A}\{d(y,a)\}=d(x,y)+d(y,A)$
ולכן - $d(x,A)\le d(x,y)+d(y,A)$.

זה החלק החשוב בהוכחה

תרגיל: נגדיר: $\ell_2=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n\in\mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty\}$. נתון קב' $A=\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ כאשר $e_i$ סדרה עם 1 ב-i.
עבור $x=(-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\dots)$ מצא $d(x,A)$.

פתרון: תחילה נשים לב שאכן $x\in\ell_2$, כי $\sum\frac{1}{n^2}<\infty$. המטריקה אצלנו - $d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-y_n|^2$ כאשר $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$
לכן: - $d(x,e_i)=\sum_{\substack{n=1\\n\ne i}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+(1+\frac{1}{i})^2$, לכן - $d(x,A)=\inf_{a\in A} d(x,a)=\inf_{i\in\mathbb{N}}\{d(x,e_i)\}=\inf\left(\sum_{n\ne i}\frac{1}{n^2}+1+\frac{2}{i}+\frac{1}{i^2}\right)=\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+1}$

הערה: לא תמיד יהיה $a\in A$ שעבורו $d(x,A)=d(x,a)$, כי זה inf ולא min!

# כדורים

**הגדרה:** יהי $(M,d)$ מרחב מטרי.

$\boxed{\text{כדור פתוח}}$ עם מרכז $a$ ורדיוס $r$ - $B(a,r)=\{x\in M \mid d(x,a)<r\}$

$\boxed{\text{כדור סגור}}$ - - - - - $B[a,r]=\{x\in M \mid d(x,a)\le r\}$

**הגדרה:** יהי $(M,d)$. יהי $\{x_n\}$ סדרה ב-$M$. נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ $\boxed{\text{מתכנסת}}$ ל-$x\in M$, אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$.

במונחי כדורים - לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

**הערה:** $x_n\xrightarrow{d}x \iff d(x_n,x)\to 0$.

**תרגיל:** יהי $d_3$ המטריקה ה-3 אדית על $\mathbb{Z}$.

1. תאר את $B_{d_3}(0,\frac{2}{5})$, $B_{d_3}[0,\frac{2}{5}]$.

**פתרון:** המרחקים האפשריים ב-$d_3$ הם $0,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\dots$.

$\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1$ לכן $B(0,\frac{2}{5})=B(0,1)$. צריך להבין מי נמצא בכדור $B(0,1)$.

יהי $x\in B(0,1)$, אז $d(x,0)<1$. אם $x=0$, $d(0,0)=0<1$ אז $0\in B(0,1)$.

אם $x\neq 0$, $d(x,0)=\frac{1}{3^{k(x,0)}}$ כאשר צריך ש- $\frac{1}{3^{k(x,0)}}<1$, $k(x,0)>0$ לכן $k(x,0)\ge 1$.

אז $\max\{i \mid 3^i|(x-0)\}\ge 1$, אז בעצם צריך ש-$x$ יתחלק ב-3, כלומר ש- $3^1|x$.

לכן- $B(0,\frac{2}{5})=B(0,1)=\{x\in\mathbb{Z} \mid 3|x\}=3\mathbb{Z}$.

הכדור הסגור דומה- $B[0,\frac{2}{5}]=\{x\in\mathbb{Z} \mid d(x,0)\le\frac{2}{5}\}=\{x\in\mathbb{Z} \mid d(x,0)<1\}=3\mathbb{Z}$

2. הוכח: $x_n=2\cdot 3^n+5\xrightarrow{d_3}5$

**פתרון:** נוכיח שאכן $d(x_n,5)\to 0$. $x_n\neq 5$ לכן: $d(x_n,5)=\frac{1}{3^{k(x_n,5)}}$

$k(x_n,5)=\max\{i \mid 3^i|(x_n-5)\}=\max\{i \mid 3^i|2\cdot 3^n\}=n$ אז $d(x_n,5)=\frac{1}{3^n}\to 0$

הגדרה: יהי $(M,d)$ מרחב מטרי. תהי $\{x_n\}\subseteq M$ סדרה. נאמר ש-$\{x_n\}$ $\boxed{\text{סדרת קושי}}$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m>n_0$ מתקיים - $d(x_n,x_m)<\varepsilon$.

אינטואיטיבית, ככל שמתקדמים במעלה הסדרה, האיברים מצטופפים.

הערה: כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי. ההפך לא בהכרח נכון.

מרחב שבו כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת נקרא $\boxed{\text{מרחב שלם}}$.

תרגיל: תהי $\{e_n\}$ סדרה ב-$\ell^\infty$. הראו ש-$\{e_n\}$ אינה מתכנסת ב-$\ell^\infty$ על אף שהיא מתכנסת רכיב-רכיב.

פתרון: המטריקה היא זו המושרית מהנורמה.

רכיב-רכיב:
$$\begin{array}{l}(1,0,0,\dots)\\(0,1,0,\dots)\\(0,0,1,\dots)\end{array}$$
כל רכיב הוא סדרה קבועה החל ממקום מסוים ולכן מתכנס!

מצד שני, לכל $n\neq m$: $\|e_n-e_m\|=\sup\{|e_n^i-e_m^i|: i\in\mathbb{N}\}=1$

לכן - הסדרה אינה סדרת קושי (המרחקים לא קטנים כרצוננו), ולכן לא מתכנסת.

תרגיל: תהי $x_n\xrightarrow{d_p}x$ כאשר $d_p$ המטריקה הפ-אדית, ויהי $c\in\mathbb{Z}$. הוכח $cx_n\xrightarrow{d_p}cx$.

פתרון: אם $c=0$, ברור ש- $0\to0$.

עבור $c\neq0$, נראה - $d(cx_n,cx)\to0$. אבל $d(cx_n,cx)=\frac{1}{p^{k(cx_n,cx)}}$,

$$k(cx_n,cx)=\max\{i: p^i|(cx_n-cx)\}=\max\{i: p^i|c(x_n-x)\}=$$
$$=\max\{i: p^i|c\}+\max\{i: p^i|(x_n-x)\}=k(c,0)+k(x_n,x)$$

אז -
$$d(x_n,x)=\frac{1}{p^{k(c,0)+k(x_n,x)}}=\frac{1}{p^{k(c,0)}}\cdot\frac{1}{p^{k(x_n,x)}}=\frac{1}{p^{k(c,0)}}\cdot d(x_n,x)\longrightarrow0$$

מסקנה: המרחב $(\mathbb{Z},d_5)$ לא שלם.

הוכחה: נמצא סדרת קושי שלא מתכנסת. נתבונן בסדרה - $x_n=5+5^2+\dots+5^n=\frac{5(5^n-1)}{5-1}$

נראה שזו סדרת קושי - נתבונן ב-$x_n-x_m$, $n\geq m$ (כדי למצוא את $d_5(x_n,x_m)$): $x_n-x_m=5^{m+1}+\dots+5^n$

אז - $k(x_n,x_m)=\max\{i \mid 5^i|(x_n-x_m)\}=m+1$ לכן - $d_5(x_n,x_m)=\frac{1}{5^{k(x_n,x_m)}}=\frac{1}{5^{m+1}}$

לכל $\varepsilon>0$ קיים $M$ כך ש- $\frac{1}{5^{M+1}}<\varepsilon$ ולכן זו סדרת קושי.

נראה שהסדרה לא מתכנסת - $x_n=\frac{5^{n+1}-5}{4}$. נניח בשלילה $x_n\to x$, לכן $4x_n\to4x$,

כלומר - $5^{n+1}-5\to4x$. אבל $5^{n+1}\to0$ לכן $4x=-5$ אבל $x=-\frac{5}{4}\notin\mathbb{Z}$ לכן הסדרה לא מתכנסת.

כי המרחק של $5^{n+1}$ מאפס.

__תרגיל:__ מצאו מרחב מטרי $(M,d)$ ובו כדורים $B(a_2,r_2)$, $B(a_1,r_1)$ כאשר $r_1<r_2$ וגם $B(a_2,r_2)\subset B(a_1,r_1)$

__הערה__ - שעורי בית, במרחב נורמי זה לא קורה.

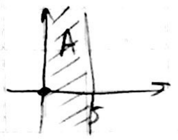
__פתרון:__ נתבונן ב- $[0,\infty)$ כתת מרחב של $\mathbb{R}$. נבחר $B(1,5)$ , $B(3,4)$

$B(1,5)=[0,6)$, $B(3,4)=[0,7)$, $[0,7) \supsetneq [0,6)$

__הגדרה:__ יהי $(X,d)$ מרחב מטרי. תת קב' $U\subseteq X$ נקראת $\boxed{\text{פתוחה}}$ ,

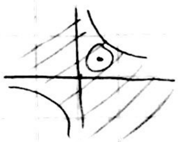
אם לכל $x\in U$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\subseteq U$ .

__דוגמאות:__




א. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 5\}$ . הקב' אינה פתוחה -

לכל $\varepsilon>0$ - $B((0,0),\varepsilon)\not\subseteq A$ .



ב. $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy<1\}$ . הקב' כן פתוחה -

לכל נק' $b\in B$ נבחר את $\varepsilon$ להיות מחצית המרחק של $b$ מהעקומה.

__הגדרה:__ יהיו $(X,d),(Y,\rho)$ שני מרחבים מטריים.

פונק' $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ תח"ע נקראת $\boxed{\text{שיכון איזומטרי}}$ אם - $\forall_{x,y\in X}: d(x,y)=\rho(f(x),f(y))$

אם $f$ גם על, היא נקראת $\boxed{\text{איזומטריה}}$

__תרגיל:__ הוכח/הפרך - האם קיים שיכון איזומטרי בין שני המרחבים?

א. $\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ כאשר $m\le n$ .

__פתרון:__ כן, למשל - $f(a_1,\dots,a_n)=(a_1,\dots,a_n,0,\dots,0)$ .

שאלה - מה קורה אם $m>n$ .

ב. $[1,7]\to[8,10]$

__פתרון:__ לא, המרחק בין 1 ל- 7 הוא $6=|7-1|$ , אבל לא נמצא $x,y\in[8,10]$ כך ש- $|x-y|=6$ .

לכן אין שיכון איזומטרי.

__תרגיל:__ האם קיים שיכון איזומטרי ממרחב לעצמו שהוא לא על?

__פתרון:__ כן, נתבונן ב- $f:\ell_2\to\ell_2$ המוגדרת ע"י - $f(a_1,a_2,\dots)=(0,a_1,a_2,\dots)$ . חח"ע, שומרת מרחק ולא על.

הגדרה: תהי $A$ קב' במרחב מטרי $(X,d)$. נגדיר את הקוטר של $A$ ע"י $\operatorname{diam} A=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}$

נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים מטריים, ונניח שיש $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ איזומטריה, אז $\operatorname{diam} X=\operatorname{diam} Y$.

הוכחה: $\operatorname{diam} X \underset{f \text{ איזו'}}{=} \sup\{d(x,y)\mid x,y\in X\} \underset{f \text{ על}}{=} \sup\{\rho(f(x),f(y))\mid x,y\in X\} = \sup\{\rho(w,z)\mid w,z\in Y\} = \operatorname{diam} Y$

מסקנה: אם $\operatorname{diam} X>\operatorname{diam} Y$, לא קיים שיכון איזומטרי $f:X\to Y$.

## רציפות

**הגדרה:** יהיו $(X,d)$, $(Y,\rho)$ מרחבים מטריים ו- $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ פונק'.

1. נאמר ש- $f$ $\boxed{\text{רציפה}}$ בנק' $a\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x$ אם $d(x,a)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(a))<\varepsilon$.

במונחי כדורים - אם $x\in B_d(a,\delta)$ אז $f(x)\in B_\rho(f(a),\varepsilon)$. כלומר שקול ל- $f(B_d(a,\delta))\subseteq B_\rho(f(a),\varepsilon)$

2. נאמר ש- $f$ $\boxed{\text{רציפה במידה שווה}}$ בקב' $A\subseteq X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$, כך שאם $d(x,y)<\delta$ אז $\rho(f(x),f(y))<\varepsilon$ לכל $x,y\in A$.

3. נאמר ש- $f$ $\boxed{\text{מקיימת ליפשיץ}}$ אם קיים $k\geq 0$ כך ש $\rho(f(x),f(y))\leq k\,d(x,y)$ לכל $x,y$ נק'.

**משפט:** ליפשיץ $\Leftarrow$ רבמ"ש $\Leftarrow$ רציפה. ניתן לראות הוכחה לכך בסיכום באתר.

**דוגמאות:**

א. לכל $1\leq i\leq n$, פונקציית ההטלה: $P_i:(\mathbb{R}^n,d_{max})\to\mathbb{R}$ כך ש- $P_i(x_1,\dots x_n)=x_i$,

היא פונק' ליפשיץ: $d(P_i(x),P_i(y))=|P_i(x)-P_i(y)|=|x_i-y_i|=d(x_i,y_i)\leq \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|=d_{max}(x,y)$

כלומר $d(P_i(x),P_i(y))\leq 1\cdot d_{max}(x,y)$ זו פונק' ליפשיץ.

ב. יהי $(X,d)$ מרחב מטרי ותהי $a\in X$. הפונק' $f_a:X\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f_a(x)=d(a,x)$

היא פונק' ליפשיץ: $d(f_a(x),f_a(y))=|f_a(y)-f_a(x)|=|d(a,y)-d(a,x)|\underbrace{\leq}_{\text{א"ש המשולש}} d(x,y)=1\cdot d(x,y)$

**תרגיל:** תהי $(X,d)\to(Y,\rho)$ רבמ"ש. נניח ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרת קושי ב- $Y$.

האם רציפות בלבד תספיק?

**פתרון:** $f$ רבמ"ש, לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x_n,x_m)<\delta$, אז $\rho(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$.

מכיוון ש- $\{x_n\}$ סדרת קושי, קיים $n_0$ כך שלכל $m,n\geq n_0$, $d(x_n,x_m)<\delta$, אז,

אכן $\rho(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$ לכן $\{f(x_n)\}$ סדרת קושי ב- $Y$.

רציפות לא מספיקה: נתבונן ב- $f:X\to Y$ כאשר: $X=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $Y=\mathbb{R}$ ו- $f(x)=\frac{1}{x}$,

ו- $f$ רציפה. נתבונן ב- $X$ בסדרה $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, זו סדרת קושי!

אבל $\{f(\frac{1}{n})\}=\{n\}_{n\in\mathbb{N}}$, זו בוודאי אינה סדרת קושי!

משפט: יהיו $(Y,\rho)$ , $(X,d)$ מ"מ ויהי $x\in X$. תהי $f:(X,d)\to(Y,\rho)$, אזי $f$ רציפה ב-$x$ אמ"מ לכל $x_n \xrightarrow{d} x$ ; $f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$

טענה: תהי $\{(x_n,y_n)\}\subseteq\mathbb{R}^2$ ו-$(x,y)\in\mathbb{R}^2$, אזי $(x_n,y_n) \xrightarrow{d_{max}} (x,y)$ אמ"מ $x_n\to x, y_n\to y$.

כלומר, סדרה ב-$\mathbb{R}^n$ מתכנסת אמ"מ היא מתכנסת רכיב-רכיב.

משפט: יהי $(X,d)$ מרחב מטרי ויהי $(A,d)$ תת-מרחב. אזי, $U$ פתוחה ב-$(A,d)$ אמ"מ $U=V\cap A$, כאשר $V$ פתוחה ב-$(X,d)$.

תרגיל: יהי $(X,d)$ מרחב מטרי ויהי $(A,d)$ תת-מרחב שלו. תהי $V\subseteq X$ המקיימת: $V\cap A$ פתוחה ב-$A$. האם $V$ פתוחה ב-$X$?

פתרון: לא בהכרח, נתבונן למשל ב-$[0,1]$ כתת-מרחב של $\mathbb{R}$. הקב' $[-1,1]$ לא פתוחה ב-$\mathbb{R}$, אך $[-1,1]\cap[0,1]=[0,1]$ פתוחה ב-$[0,1]$.

הגדרה: יהי $(X,d)$ מרחב מטרי ותהי $S\subseteq X$. $S$ נקראת סגורה, אם $S^c$ פתוחה.

* סגורה $\neq$ לא פתוחה.

הערה: קב' שהיא גם סגורה וגם פתוחה נקראת סגוחה (clopen).

תרגיל: מצאו דוגמה לתת-מרחב מטרי $A$ של $\mathbb{R}$, שבו כל קב' פתוחה היא גם פתוחה ב-$\mathbb{R}$, אך לא כל קב' סגורה היא גם סגורה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון: מהדרישה הראשונה, נבחר קב' פתוחה ב-$\mathbb{R}$. למשל, $A=(0,1)$.

כל קב' פתוחה ב-$A$ גם פתוחה ב-$\mathbb{R}$. עם זאת, $(0,1)$ סגורה ב-$(0,1)$ אך לא ב-$\mathbb{R}$.

* בכל מרחב מטרי $X$, $X,\emptyset$ שתיהן סגורות.

משפט: יהיו $X,Y$ מ"מ. פונק' $f:X\to Y$ היא רציפה אמ"מ לכל $U\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

אפשר לנסח זאת גם לקב' סגורות.

הגדרה: נאמר ששתי המטריקות על אותה קב' $X$ הן שקולות, אם הן מגדירות את אותו האוסף של קב' פתוחות.

באופן שקול, נאמר ש- $\rho, d$ מטריקות על $X$ הן שקולות,
אם $x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_n \xrightarrow{d} x$.

תרגיל: על המרחב $C[0,1]$ ($f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפות), נגדיר שתי מטריקות:

$$d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx \quad , \quad d_{max}(f,g)=\max|f(x)-g(x)|$$

נראה שהמטריקות לא שקולות.

פתרון: נתבונן בסדרה $x^n$. במטריקה $d$, $x^n \xrightarrow{d} 0$

$$d(x^n,0)=\int_0^1|x^n-0|\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n+1}$$

$\frac{1}{n+1}\to 0$ לכן $x^n\xrightarrow{d}0$.

כמו כן, $d_{max}(x^n,0)=1$ ולכן $x^n \not\xrightarrow{d_{max}} 0$

לכן, 2 המטריקות לא שקולות.

תרגיל: תהיינה $d,\rho$ שתי מטריקות על $X$, $d,\rho$ שקולות,
אמ"מ $Id:(X,\rho)\to(X,d)$, $Id:(X,d)\to(X,\rho)$ רציפות.

פתרון: $d,\rho$ שקולות $\iff x_n\xrightarrow{\rho}x \leftrightarrow x_n\xrightarrow{d}x \iff Id(x_n)\xrightarrow{\rho}Id(x)\leftrightarrow Id(x_n)\xrightarrow{d}Id(x)$

$\iff Id:(X,\rho)\to(X,d)$ , $Id:(X,d)\to(X,\rho)$ רציפות.

תרגיל: יהיו $(X,d)$ מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי. אזי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה.

* חסומה לומר קיימים $a,r$ כך ש- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(a,r)$

פתרון: מכיוון שזו סדרת קושי, קיים $n_1$ כך שלכל $m,n>n_1$: $d(x_m,x_n)<1$.

נקבע $x_m$ כאשר $m>n_1$. אם כן, נתבונן ב- $r=\max\limits_{1\le i\le n_1}\{1, d(x_m,x_i)\}+1$

לכל $n$ נקבל ש- $d(x_m,x_n)<r$ $\Leftarrow$ $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq B(x_m,r)$ ולכן הסדרה חסומה.

ממזערים את ראש הסדרה, ואז בולאים את הזנב כי זוהי סדרת קושי

תרגיל: אם לסדרת קושי יש גבול חלקי אז הסדרה מתכנסת לגבול החלקי.

פתרון: תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קושי, נניח ש-$x$ גבול חלקי של הסדרה.

קיימת סדרת מספרים $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ שואפת לאינסוף כך ש- $x_{n_k}\longrightarrow x$

כלומר, לכל $\varepsilon>0$ קיים $n'$ כך שלכל $n_k>n'$; $d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$.

מצד שני, זו סדרת קושי, לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $n''$ כך שלכל $n_k,n>n''$,

מתקיים: $d(x_{n_k},x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$ לכן, החל מ- $\max\{n',n''\}$, נקבל:

$d(x_{n_k},x), d(x_n,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}$ ולפי א"ש המשולש: $d(x,x_n)\le d(x_{n_k},x)+d(x_n,x_{n_k})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

תרגיל: הוכיחו שכדור סגור הוא קבוצה סגורה.

פתרון: יהי $B[a,r]$ כדור סגור במרחב מטרי $(X,d)$.

נראה ש-$(B[a,r])^c$ פתוחה. יהי $x\in(B[a,r])^c$, נמצא $\varepsilon$ כך ש-$B(x,\varepsilon)\subseteq(B[a,r])^c$.

$x\in(B[a,r])^c$ לכן- $d(x,a)>r$, נבחר- $\varepsilon=d(x,a)-r$.

יהי $y\in B(x,\varepsilon)$, צ"ל- $y\in(B[a,r])^c$, כלומר- $d(a,y)>r$

$y\in B(x,\varepsilon)$ לכן- $d(x,y)<\varepsilon$, לכן- $d(x,y)<d(x,a)-r$

אז- $d(a,y)\ge d(x,a)-d(x,y)>r$, לכן $y\notin B[a,r]$, כלומר- $y\in(B[a,r])^c$

ולכן- $B(x,\varepsilon)\subseteq(B[a,r])^c$ ולכן, זו קבוצה פתוחה ולכן $B[a,r]$ סגורה.

תזכורת: פונק' $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ היא רציפה $\Longleftrightarrow$ לכל $U\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)$ פתוחה.

הדבר נכון גם לקב' סגורות.

לדוגמה - ראינו שעבור $(X,d)$ מ"מ, הפונק' $f_a:X\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=d(a,x)$ היא רציפה.

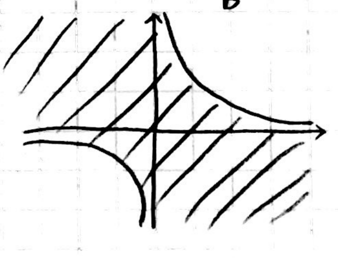
נקבל, $B[a,r]=f^{-1}([0,r])$. $[0,r]\subseteq\mathbb{R}$ סגורה ו-$f$ רציפה ולכן $B[a,r]$ סגורה.

לדוגמה - $f:X\to \underset{B}{Y}$ כך ש-$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy<1\}$, $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$

נתבונן בפונק' $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י: $f(x,y)=xy$

זו פונק' רציפה (פולינום) ומתקיים: $A=f^{-1}((-\infty,1))$,

$(-\infty,1)$ פתוחה ב-$\mathbb{R}$ לכן $A$ פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$.



**תרגיל:** נראה שבמרחב מטרי, כל קב' סגורה היא $G_\delta$ - חיתוך בן-מניה של קב' פתוחות.

**תת-תרגיל 1:** במרחב מטרי, איחוד כלשהו של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

חיתוך סופי של קב' פתוחות הוא קב' פתוחה.

**פתרון:** יהיו $\{a_i\}_{i\in I}$ קב' פתוחות. יהי $x\in\bigcup_{i\in I} a_i$. קיים $\varepsilon>0$ כך ש-

$B(x,\varepsilon)\subseteq a_i$ עבור $i$ כלשהו ולכן- $B(x,\varepsilon)\subseteq\bigcup_{i\in I} a_i$ פתוחה.

תהיינה $a_1,a_2$ פתוחות ויהי $x\in a_1\cap a_2$, קיימים $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$

כך ש- $B(x,\varepsilon_1)\subseteq O_1$, $B(x,\varepsilon_2)\subseteq O_2$, נגדיר $\varepsilon=\frac{\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}}{2}$

ואז- $B(x,\varepsilon)\subseteq B(x,\varepsilon_1)\subseteq O_1$, $B(x,\varepsilon)\subseteq B(x,\varepsilon_2)\subseteq O_2$

ולכן- $B(x,\varepsilon)\subseteq O_1\cap O_2$ ולכן- $O_1\cap O_2$ פתוחה.

חיתוך כלשהו לא בהכרח קב' פתוחה: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)}_{\text{פתוחות}}=\underbrace{\{0\}}_{\text{לא פתוחה}}$

לפי דה-מורגן, איחוד סופי של קב' פתוחות הוא קב' סגורה.

חיתוך כלשהו של קב' סגורות הוא קב' סגורה.

איחוד כלשהו של סגורות הוא לאו דווקא קב' סגורה: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\underbrace{\left(-\infty,-\frac{1}{n}\right]}_{\text{סגורות}}=\underbrace{(-\infty,0)}_{\text{לא סגורה}}$

**תת-תרגיל 2:** יהי $M$ מרחב מטרי. תהי $A\subseteq M$ סגורה

הוכח שאם $x\notin A$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$.

**פתרון:** $A$ סגורה, לכן $A^c$ פתוחה לכן קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\subseteq A^c$ (כי $x\notin A$ אז $x\in A^c$),

קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{n}<\varepsilon$ ולכן $B(x,\frac{1}{n})\subseteq A^c$, כלומר- $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$.

**פתרון:** יהי $(X,d)$ מרחב מטרי, ותהי $A\subseteq X$ קב' סגורה. לכל $n\in\mathbb{N}$ נגדיר $O_n=\bigcup_{a\in A}B(a,\frac{1}{n})$.

נראה ש- $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$. $O_n$ פתוחה לכל $n\in\mathbb{N}$ כאיחוד של כדורים פתוחים

מצד אחד, לכל $n\in\mathbb{N}$, $A\subseteq O_n$ כי לכל $a\in A$ - $a\in B(a,\frac{1}{n})$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן $a\in O_n$. לכן $A\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$.

מצד שני, יהי $x\notin A$, נראה ש $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$. מהתרגיל הקודם, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $B(x,\frac{1}{n})\cap A=\emptyset$.

לכל $a\in A$, $a\notin B(x,\frac{1}{n})$, כלומר $x\notin B(a,\frac{1}{n})$. לכן $x\notin\bigcup_{a\in A}B(a,\frac{1}{n})=O_n$, אז $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$.

סה"כ קיבלנו שלכן $A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n$ ולכן כל קב' סגורה במ"מ היא $G_\delta$.

**משפט:** יהי $(X,d)$ מ"מ. $A\subseteq X$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ כך ש- $x_n\xrightarrow{d}x$ מתקיים $x\in A$.

כלומר היא סגורה $\iff$ היא מכילה את כל נק' הגבול שלה.

אם A סגור המשלים פתוח, ולכן לכל נקודה בו יש סביבה בלי איברים ב-A, וכל כל נקודות הגבול ב-A.
אם נקודות הגבול של A נמצאות ב-A, אזי המשלים של A פתוח, מכיוון שלכל נקודה במשלים היא לא נקודת גבול, ויש סביבה כך שאין בה נקודות מ-A.

**תרגיל:** יהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את הגרף של $f$ ע"י $Gr f=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f(x)=y\}\subseteq\mathbb{R}^2$.

הראו שאם $f$ רציפה אז $Gr f$ תת קב' סגורה של $\mathbb{R}^2$.

**פתרון:** תהי $\{(x_n,y_n)\}\subseteq Gr f$ סדרה המתכנסת ל-$(x,y)$. נר' $(x,y)\in Gr f$ כלומר $y=f(x)$.

$(x_n,y_n)\in Gr f$ לכן $y_n=f(x_n)$.

מצד אחד, $f(x_n)=y_n\to y$. מצד שני $f$ רציפה ומכיוון ש- $x_n\to x$ נקבל $f(x_n)\to f(x)$.

מיחידות הגבול - $y=f(x)$ כנדרש.

**הגדרה:** יהי $(X,d)$ מ"מ ותהי $A\subseteq X$. נק' $a\in X$ נקראת $\boxed{\text{נקודת הצטברות}}$ של $A$,

אם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים $(B(a,\varepsilon)\setminus\{a\})\cap A\neq\emptyset$.

כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיים $a\neq x\in A$ כך ש- $x\in B(a,\varepsilon)$.

שקול - לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ כך ש- $0<d(x,a)<\varepsilon$.

תנאים שקולים: * קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A\setminus\{a\}$ המתכנסת ל-$a$.

* קיימת סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ של איברים שונים המתכנסת ל-$a$.

נסמן ב-$A'$ את $\boxed{\text{קבוצת נק' ההצטברות}}$ של קב' $A$.

**משפט:** $A$ סגורה $\iff$ $A'\subseteq A$.

**תרגיל:** יהי $(X,d)$ מ"מ. הראו שלכל קב' $A$, $A''\subseteq A'$.

**מסקנה:** לכל קב' $A$, $A'$ קב' סגורה.

**פתרון:** יהי $x\in A''$. נראה ש- $x\in A'$. צריך להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $y\in A$ כך ש- $0<d(x,y)<\varepsilon$.

יהי $\varepsilon>0$. $x\in A''$ ולכן קיים $z\in A'$ כך ש- $0<d(x,z)<\frac{\varepsilon}{2}$.

$z\in A'$ ולכן קיים $y\in A$ כך ש- $0<d(y,z)<d(x,z)$. אז $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)<2d(x,z)<\varepsilon$

לגבי אפסילון, הרי אפשר לבחור את $\varepsilon$.

$d(y,z)<d(x,z)$ לכן $y\neq x$ אז $d(x,y)>0$. מכאן - $0<d(x,y)<\varepsilon$, לכן $x\in A'$ והראינו $A''\subseteq A'$.

**תרגיל:** הראו שלכל תת קב' סופית במ"מ אין נק' הצטברות.

**פתרון:** תהי $A$ סופית. נניח בשלילה ש-$x$ נק' הצטברות שלה לכן קיימת $\{x_n\}\subseteq A$ המתכנסת ל-$x$ של איברים שונים,

בסתירה לכך ש-$A$ סופית. $\Longleftarrow$ כל קב' סופית היא סגורה!

תרגיל: הראו ש- $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ קב' סגורה.

פתרון: נראה ש- $\mathbb{Z}'=\emptyset$, אז $\mathbb{Z}\supseteq\mathbb{Z}'$ ולכן סגורה.

נניח בשלילה שקיים $x\in\mathbb{R}$ נק' הצטברות של $\mathbb{Z}$.

לכן קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Z}$ של איברים שונים כך ש- $x_n\to x$. כלומר $d(x_n,x)\to 0$.

מצד שני, לכל $a,b$ שונים $d(a,b)\geq 1$. לכן סדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{Z}$ היא קבועה לבסוף,

בסתירה לכך שכל איבריה שונים. לכן $\mathbb{Z}'=\emptyset$ ו- $\mathbb{Z}$ סגורה.

הערה: א. נאמר ששתי מטריקות $\rho,d$ על $X$ הן $\boxed{\text{שקולות במובן ליפשיץ}}$,

אם קיימים סקלרים $\alpha,\beta$ כך ש- $\forall x,y\in X: \alpha\rho(x,y)\leq d(x,y)\leq\beta\rho(x,y)$.

ב. נאמר ששתי נורמות $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ על $X$ מ"ו הן $\boxed{\text{שקולות}}$,

אם קיימים סקלרים $\alpha,\beta$ כך ש- $\forall v\in X: \alpha\|v\|_2\leq\|v\|_1\leq\beta\|v\|_2$.

הערות: 1. נורמות שקולות משרות מטריקות שקולות במובן ליפשיץ.

2. מטריקות שקולות במובן ליפשיץ הן שקולות. אפשר להראות זאת ע"י סנדוויץ'.

יש מטריקות שקולות שאינן שקולות במובן ליפשיץ.

תרגיל: נניח ש- $d_1,d_2$ שקולות במובן ליפשיץ מעל $X$. הוכיחו ש- $(X,d_1)$ שלם $\Leftrightarrow$ $(X,d_2)$ שלם.

פתרון: נניח ש- $(X,d_1)$ שלם. נוכיח ש- $(X,d_2)$ שלם.

תהי $\{x_n\}\subseteq(X,d_2)$ סדרת קושי. נתבונן ב- $Id:(X,d_2)\to(X,d_1)$.

$Id$ ליפשיץ ולכן $Id$ רבמ"ש ולכן, גם $\{Id(x_n)\}$ סדרת קושי,

כלומר $\{x_n\}\subseteq(X,d_1)$ סדרת קושי. לכן $\{x_n\}$ מתכנסת לפי $d_1$.

מכיוון שהמטריקות שקולות, $\{x_n\}$ מתכנסת גם לפי $d_2$ ולכן $(X,d_2)$ שלם.

הגדרה: נורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ נקראות $\boxed{\text{שקולות}}$ מעל מ"ו $X$,

אם קיימים $a,b>0$ כך שלכל $x$ - $\|x\|_2 \le b\|x\|_1$, $\|x\|_1 \le a\|x\|_2$.

הגדרה: יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי. נאמר ש- $A \subseteq X$ חסומה בנורמה אם קיים $M>0$

כך שלכל $x \in A$, $\|x\| \le M$.

תרגיל: תהיינה $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ נורמות שקולות על מ"ו $X$. הוכח/הפרך:

א. תהי $A$ חסומה ב-$(X, \|\cdot\|_1)$, אזי $A$ חסומה ב-$(X, \|\cdot\|_2)$.

פתרון: משקילות הנורמות: $\|\cdot\|_2 \le b \cdot \|x\|_1 \le b \cdot M$ : $\forall x \in A$

לכן גם חסומה ב-$(X, \|\cdot\|_2)$

ב. תהי $A$ חסומה ב-$\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית. האם $A$ חסומה ב-$(\mathbb{R}^2, d_{max})$?

פתרון: המטריקות שלנו הן שקולות והן מושרות ע"י נורמות.

כי היא חסומה בנורמה $\Longleftrightarrow$ היא חסומה במטריקה המושרת מהנורמה

לכן לפי סעיף א', $A$ חסומה גם ב-$d_{max}$.

תרגיל: תהיינה $\rho, d$ שתי מטריקות שקולות על $X$. המרחב $(X,d)$ שלם. האם $(X,\rho)$ גם שלם?

פתרון: מטריקות שקולות אומרות שההתכנסות באותה צורה. השאלה היא האם סדרות קושי זהות בשתי המטריקות.

הפרכה: $d$ המטריקה הסטנדרטית על $\mathbb{R}$. $(\mathbb{R},d)$ מרחב שלם.

נזכיר שאם $f$ פונ' חח"ע, אז $\rho(x,y)=|f(x)-f(y)|$ היא מטריקה.

לכן- $\rho(x,y)=|e^x-e^y|$ היא מטריקה על $\mathbb{R}$. נראה שהמטריקות שקולות (ע' התכנסות).

תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה כך ש $x_n \xrightarrow{d} x$. נסתכל על $e^x$. לכן לפי היינה $e^{x_n} \to e^x$,

כלומר $d(e^{x_n}, e^x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ אז $|e^{x_n}-e^x| \to 0$ לכן $\rho(x_n,x) \to 0$ וקיבלנו $x_n \xrightarrow{\rho} x$.

כמו כן לצד השני נניח $x_n \xrightarrow{\rho} x$. כלומר $|e^{x_n}-e^x| \to 0$ אז $e^{x_n} \to e^x$.

$\ln x$ רציפה ולכן לפי היינה- $\ln e^{x_n} \xrightarrow{d} \ln e^x$ וקיבלנו $x_n \xrightarrow{d} x$. לכן המטריקות שקולות.

נראה ש- $(X,\rho)$ לא שלם, כלומר נמצא סדרת קושי שלא מתכנסת.

נתבונן בסדרה $\{\ln\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. יהי $\varepsilon$ ויהיו $m<n$. אזי $\rho(\ln\frac{1}{n}, \ln\frac{1}{m}) = |e^{\ln\frac{1}{n}} - e^{\ln\frac{1}{m}}| = |\frac{1}{n}-\frac{1}{m}| < \frac{1}{m}$

לכן אפשר לבחור $\varepsilon = \frac{1}{m}$ וקיבלנו שזו סדרת קושי. אבל הסדרה לא מתכנסת ב-$\rho$,

מכיוון שהיא לא מתכנסת ב-$d$.

הגדרה: יהי $A\subseteq X$ במ"מ $(X,d)$. נגדיר את $\boxed{\text{הסגור}}$ של $A$ להיות $\bar{A}=cl(A)\equiv\{x\in X \mid d(x,A)=0\}$

באופן שקול: 1. $cl(A)=\bigcap\limits_{\substack{A\subseteq S \\ \text{סגורה } S}} S$

2. $cl(A)$ הוא הקב' הסגורה המינימלית המכילה את $A$.

3. $cl(A)=A\cup A'$.

קריטריון סגירות: התנאים הבאים שקולים:

א. $A$ סגורה

ב. $A'\subseteq A$

ג. $cl(A)=A$

ד. $A$ הוא קב' האפסים של פונק' ממשית רציפה, כלומר קיימת $f:X\to\mathbb{R}$ כך ש-$A=\{x\in X\mid f(x)=0\}$.

לגבי 1 ל-4 זוהי כמובן פונקציית האינדיקטור (המציינת) שמחזירה 1 אם שייך ו-0 אם לאו. נבדוק את קבוצת המקורות מול קבוצת התמונות ונקבל גרירה לוגית.
ואז מקור של פתוחה הוא פתוח בפונקציה רציפה שמוכיח 4 ל-1.

## טופולוגיה -

**הגדרה:** תהי $X$ קב' ו-$\tau\subseteq P(X)$. $\tau$ נקראת $\boxed{\text{טופולוגיה}}$ אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

א. $\phi, X \in \tau$

ב. אם $\{O_i\}_{i\in I}\subseteq \tau$ אז $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$

ג. אם $\{O_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \tau$ אז $\bigcap_{i=1}^{n} O_i\in\tau$

במצב כזה, $O\in\tau$ נקראת $\boxed{\text{פתוחה}}$.

**הגדרה:** במרחב טופולוגי $(X,\tau)$, $Z$ נקראת $\boxed{\text{סגורה}}$ אם $Z^c$ פתוחה ($Z^c\in\tau$).

**דוגמאות:**

א. תהי $X$, $P(X)$ טופולוגיה על $X$. טופולוגיה זו נקראת $\boxed{\text{הטופולוגיה הדיסקרטית}}$ $\tau_{disc}$.

ב. תהי $X$, $\tau=\{\phi,X\}$ טופולוגיה על $X$. טופולוגיה זו נקראת $\boxed{\text{הטופולוגיה הטריוויאלית}}$.

ג. עבור $X=\{a,b\}$. נגדיר $\tau=\{\phi,X,\{a\}\}$. זו טופולוגיה על $X$.

ד. עבור מרחב מטרי $(X,d)$. $\tau=\{O\in P(X) \mid O \text{ פתוחה ב-} d\}$ היא $\boxed{\text{טופולוגיה המושרית מהמטריקה}}$

ה. על קב' $X$ נגדיר את $\boxed{\text{הטופולוגיה הקו-סופית}}$ ע"י $\tau_{cof}=\{O\in P(X) \mid |O^c|<\infty\}\cup\{\phi\}$.

ו. תהי $p\notin\mathbb{R}$ ונגדיר $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$. נגדיר טופולוגיה ע"י $\tau=\{O\in P(X) \mid |O^c|\le\aleph_0 \vee p\notin O\}$.

**תרגיל:** הוכח ש-$\tau_{cof}$ אכן טופולוגיה על $X$.

**פתרון:** א. $\phi\in\tau_{cof}$ ו- $|X^c|=|\phi|=0<\infty$ לכן גם $X\in\tau_{cof}$.

ב. יהיו $\{O_i\}_{i\in I}\subseteq\tau_{cof}$. צ"ל $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau_{cof}$.

אם קיים $O_j$ כך ש $|O_j^c|<\infty$ אז $O_j\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$ אז $(\bigcup_{i\in I}O_i)^c\subseteq O_j^c$.

לכן $|(\bigcup_{i\in I}O_i)^c|\le|O_j^c|<\infty$ ולכן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau_{cof}$.

אם $O_i=\phi$ לכל $i\in I$, אז $\bigcup_{i\in I}O_i=\phi$ ולכן $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau_{cof}$.

ג. יהיו $\{O_i\}_{i=1}^{n}\subseteq\tau_{cof}$. צ"ל $\bigcap_{i=1}^{n}O_i\in\tau_{cof}$.

אם קיים $O_j$ כך ש $O_j=\phi$ אז $\bigcap_{i=1}^{n}O_i=\phi$ ובפרט $\bigcap_{i=1}^{n}O_i\in\tau_{cof}$.

אם לכל $i$, $|O_i^c|<\infty$, לפי דה מורגן מקבל ש- $(\bigcap_{i=1}^{n}O_i)^c=\bigcup_{i=1}^{n}O_i^c$

אבל $|\bigcup_{i=1}^{n}O_i^c|\le\sum_{i=1}^{n}|O_i^c|<\infty$. לכן $\bigcap_{i=1}^{n}O_i\in\tau_{cof}$, והראינו ש $\tau_{cof}$ טופולוגיה.

**הערה:** אם $X$ סופית, $\tau_{cof}=\tau_{disc}$.

## הוכחה טופולוגית לקיום של אינסוף ראשוניים:

**הגדרה**: עבור $a\in\mathbb{Z}$, $d\in\mathbb{N}$ נגדיר $\boxed{\text{סדרה חשבונית דו צדדית}}$ ע"י $S=a+d\mathbb{Z}=\{a+dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה:

$O\in\tau \iff$ לכל $x\in O$ קיימת סדרה חשבונית דו-צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש- $S\subseteq O$.

הגדרה שקולה- לכל $x\in O$ קיימת $S=a+d\mathbb{Z}$ כך ש- $x\in S\subseteq O$.

**תרגיל 1**: הראה ש-$\tau$ טופולוגיה.

**פתרון**: א. $\phi\in\tau$ באופן ריק. $\mathbb{Z}\in\tau$ כי לכל $x\in\mathbb{Z}$, $x+2\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Z}$.

ב. יהיו $\{O_i\}_{i\in I}\subseteq\tau$. צ"ל $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

יהי $x\in\bigcup_{i\in I}O_i$. בפרט, קיים $j\in I$ כך ש- $x\in O_j$. $O_j\in\tau$ לכן קיימת סדרה $x+d\mathbb{Z}$ כך ש $x+d\mathbb{Z}\subseteq O_j\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$. לכן גם $\bigcup_{i\in I}O_i\in\tau$.

ג. יהיו $O_1,O_2\in\tau$. צ"ל $O_1\cap O_2\in\tau$. מספיק להוכיח עבור 2 קב' ולהכליל לחיתוך סופי.

יהי $x\in O_1\cap O_2$. אז $x\in O_1$ ו- $x\in O_2$, לכן קיימות $x+d_1\mathbb{Z}$, $x+d_2\mathbb{Z}$ כך ש- $x+d_1\mathbb{Z}\subseteq O_1$, $x+d_2\mathbb{Z}\subseteq O_2$, אז $x+d_1d_2\mathbb{Z}\subseteq O_1\cap O_2$ לכן $O_1\cap O_2\in\tau$ (אפשר לקחת גם $lcm(d_1,d_2)$).

לכן $\tau$ טופולוגיה.

**תרגיל 2**: כל סדרה $S=a+d\mathbb{Z}$ היא פתוחה.

**פתרון**: יהי $x\in S$. $S=x+d\mathbb{Z}$ ו-$S$ היא הסדרה המבוקשת לכן $S\in\tau$, כלומר פתוחה.

**תרגיל 3**: כל סדרה $S=a+d\mathbb{Z}$ היא סגורה.

**פתרון**: נראה ש- $(a+d\mathbb{Z})^c$ פתוחה. נשים לב ש $(a+d\mathbb{Z})$ היא מחלקת השקילות של $a$ מודולו $d$, כלומר $x\in a+d\mathbb{Z} \iff x\equiv a \mod d$.

לכן, $x\in(a+d\mathbb{Z})^c \iff$ קיים $k\not\equiv a \mod d$ כך ש- $x\equiv k \mod d$.

לכן- $(a+d\mathbb{Z})^c=\bigcup_{\substack{k=0\\k\neq 0}}^{d-1}[k]=\bigcup_{k=0}^{d-1}(k+d\mathbb{Z})$ וזה איחוד של קב' פתוחות, לכן זו קב' פתוחה.

ולכן $a+d\mathbb{Z}$ סגורה.

השלמת ההוכחה- נשים לב שאיחוד כל הסדרות שמתחילות באפס עם הפרשים ראשוניים זה Z פחות 1,-1.
נקבל שאם איחוד זה סופי (יש מספר סופי של ראשוניים), אזי הקבוצה משמאל סגורה, בניגוד לכך שהמשלים לקבוצה סופית (שהוא אינסופי) בטופולוגיה זו לא יכול להיות סגור (קבוצה פתוחה גורר אינסופית).

הערה: מרחב טופולוגי $(X,\tau)$ נקרא $\boxed{\text{מטריזבילי}}$ אם קיימת מטריקה $d$ על $X$ המשרה את $\tau$.

דוגמאות:

א. הטופולוגיה $\tau_{disc}$ מושרית מהמטריקה הדיסקרטית.

ב. $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$. $\tau$ אינה מטריזבילית כי במרחב מטרי כל יחידון הוא סגור, אבל $\{a\}$ לא סגור כי המשלים $\{b\}$ פתוחה.

תרגיל: תהי $p\notin\mathbb{R}$ ויהי $X=\mathbb{R}\cup\{p\}$. $\tau=\{O\subseteq X \mid p\notin O \text{ או } |X\setminus O|\leq\aleph_0\}$ טופולוגיה.
הוכח $(X,\tau)$ לא מטריזבילי.

פתרון: במרחב מטרי, כל קבוצה סגורה היא $G_\delta$, כלומר חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
נמצא קבוצה סגורה ב-$X$ שלא ניתנת להצגה כחיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
$\mathbb{R}$ פתוחה ב-$X$ כי $p\notin\mathbb{R}$ לכן $\mathbb{R}^c=\{p\}$ היא קבוצה סגורה.
נניח בשלילה ש-$\{p\}$ הוא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n=\{p\}$ כאשר $O_n\in\tau$.
מכיוון שהחיתוך שווה ל-$\{p\}$, $p\in O_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. לכן לכל $n\in\mathbb{N}$, $|O_n^c|\leq\aleph_0$.
נקבל- $\{p\}^c=\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}O_n\right)^c$ אז- $\mathbb{R}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}O_n^c$, בסתירה כי $\mathbb{R}$ לא בן מניה אבל $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}O_n^c$ בן מניה.
לכן $\{p\}$ אינה $G_\delta$. $\{p\}$ סגורה לכן $(X,\tau)$ אינו מטריזבילי.

עוד דוגמא:

אם $|X|\geq 2$, הטופולוגיה הטריוויאלית $\{\emptyset,X\}$ לא מטריזבילית כי בכל מטריקה על $X$ תמיד
יש עוד קבוצה פתוחה חוץ מ-$X,\emptyset$. למשל- $B(x,r)$ כאשר $x\in X$ ו-$r>0$.

## התכנסות

**הגדרה:** יהי $(X,\tau)$ מ"ט.

נאמר שסדרה $\{x_n\}\subseteq X$ מתכנסת ל-$x$ אם לכל קבוצה פתוחה $x\in O\in\tau$,

קיים $n_0$ כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in O$.

**דוגמה:** נתבונן למשל ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית.

ניקח סדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{R}$ ו-$x\in\mathbb{R}$.

הסביבה הפתוחה היחידה של $x$ היא $\mathbb{R}$, וברור ש-$x_n\in\mathbb{R}$ לכל $n$.

לכן בטופולוגיה הטריוויאלית כל סדרה מתכנסת לכל $x$.

**דוגמה:** נתבונן לטופולוגיה $\tau=\{O\subseteq X \mid p\notin O \vee |X\setminus O|\leq\aleph_0\}$ כאשר $p\notin\mathbb{R}$ ו-$X=\mathbb{R}\cup\{p\}$.

נבדוק מי הסדרות שמתכנסות ב-$\tau$. תהי $\{x_n\}$ סדרה ותהי $x\in X$.

נתבונן בקב' $V=(X\setminus\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\cup\{x\}$. כעת $\{x\}\cup\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\supseteq X\setminus V$ ולכן $|X\setminus V|\leq\aleph_0$.

לכן $V$ פתוחה. כמו כן $x\in V$. לכן קיים $n_0$ כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in V$.

אם מהגדרת $V$, החל ממקום מסוים $x_n=x$. לכן סדרות מתכנסות ב-$(X,\tau)$ הן קבועות לבסוף.

במרחבים מטריים, סדרה קבועה לבסוף $\Leftrightarrow$ סדרה מתכנסת רק כשהטופולוגיה היא הדיסקרטית.

לכן אם $(X,\tau)$ היא מטריזבילי, בהכרח $\tau=\tau_{disc}$.

אבל $\{p\}\notin\tau$ ו-$\{p\}\in\tau_{disc}$ לכן $\tau\neq\tau_{disc}$, ולכן $\tau$ לא מטריזבילי.

**הערה:** בניגוד למרחבים מטריים, התכנסות סדרות לא מגדירה באופן יחיד את הטופולוגיה

(ראינו 2 טופולוגיות שונות עם אותו אוסף של סדרות מתכנסות).

## רציפות -

<u>הגדרה:</u> תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונקציה בין מרחבים טופולוגיים.

נאמר ש-$f$ $\boxed{\text{רציפה}}$ ב-$x\in X$ אם לכל סביבה פתוחה $V$ של $f(x)$, קיימת סביבה פתוחה $U$ של $x$ כך ש-$U\subseteq f^{-1}(V)$ $\left(f(U)\subseteq V\right)$.

<u>הערה:</u> פונ' היא רציפה אם מקור של פתוחה היא פתוחה.

לכן - $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\sigma)$ ו-$f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$ תמיד רציפות.

$\tau_{trivial}=\{\emptyset,X\}$ $\quad$ $\tau_{disc}=P(X)$

<u>תרגיל:</u> תהי $f:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x$ כאשר $\tau=\{\emptyset,\mathbb{R},\{2\}\}$.

א. מצאו את נק' אי הרציפות של $f$.

<u>פתרון:</u> הפונ' לא רציפה ב-$\{1\}$ ורציפה בשאר $\mathbb{R}$.

תהי $a\neq 1$ ב-$\mathbb{R}$. הסביבה הפתוחה היחידה של $f(a)$ היא $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}=f^{-1}(\mathbb{R})$ ו-$\mathbb{R}$ סביבה פתוחה מכילה של $a$.

עבור $a=1$, $f(a)=2$. עבור הסביבה הפתוחה $\{2\}$ של $f(a)$, לא קיימת סביבה פתוחה $U$ של $a$ כך ש-$f(U)\subseteq\{2\}$ (כי $U=\mathbb{R}$).

ב. הוכח/הפרך: קיימת טופולוגיה $\tau$ על $\mathbb{R}$ ופונ' רציפות $f,g:(\mathbb{R},\tau)\to(\mathbb{R},\tau)$ עבורן $g+f$ לא רציפה.

<u>פתרון:</u> נתבונן במרחב מסעיף א'. $f(x)=g(x)=x$ הזהות.

פונ' הזהות רציפה אך $f+g=2x$ לא רציפה.

<u>מסקנה:</u> בט"כ אין בהכרח אריתמטיקה של פונ' רציפות.

# קשירות

**הגדרה:** מרחב טופולוגי $(X,\tau)$ נקרא $\boxed{\text{קשיר}}$, אם לא קיימות $U,V\in\tau$ זרות ולא ריקות כך ש- $X=U\cup V$.

**דוגמאות:**

1. $\mathbb{R}$ קשיר.
2. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ לא קשיר, כי $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

**הערה:** אם $X=U\cup V$ אז $V=U^c$.

לכן- מרחב קשיר $\Leftrightarrow$ לא קיימת סגוחה לא טריוויאלית $(X,\emptyset)$.

**תרגיל:** תהי X קב' לא ריקה עם הטופולוגיה הקו-סופית - $\tau_{cof}=\{O\subseteq X \mid |O^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$

האם $(X,\tau_{cof})$ קשיר?

**פתרון:** אם X סופי, כל קב' היא פתוחה ולכן $\tau_{cof}=\tau_{dis}$.

אם ב-X יש יותר מאיבר אחד, X לא קשיר: נקח $x\in O$ לא טריוויאלית ו-O סגוחה.

אם ב-X יש רק איבר אחד, X קשיר.

אם X אינסופי, נניח בשלילה ש-X לא קשיר. לכן קיימת $O\subseteq X$ סגוחה לא טריוויאלית.

מצד אחד, O סגוחה, לכן O היא משלים של פתוחה ולכן סופית.

מצד שני, O פתוחה, לכן $|X\setminus O|=|O^c|$ סופית, ומכיוון ש-X אינסופית, גם O אינסופית, בסתירה! לכן X אינסופי הוא קשיר.

**הגדרה:** על $\mathbb{R}$ נגדיר את הטופולוגיה הבאה - $T=\{O\subseteq\mathbb{R} \mid O \text{ היא איחוד קטעים } [a,b)\}$

טופולוגיה זו נקראת $\boxed{\text{הישר של סורגנפריי}}$.

נשים לב - $\mathbb{R}\supseteq(a,b)=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a+\frac{1}{n},b)$, לכן כל קטע פתוח ב-$\mathbb{R}$ פתוח גם ב-$(\mathbb{R},T)$.

אז- כל קב' פתוחה ב-$\mathbb{R}$ פתוחה גם ב-$(\mathbb{R},T)$.

**תרגיל:** האם $(\mathbb{R},T)$ קשיר?

למעשה הוא בלתי קשיר לחלוטין- [a,b) היא קבוצה סגוחה בטופולוגיה הזו, ולכן לכל קטע יש פירוק טופולוגי

**פתרון:** נתבונן ב-$[a,b)$. זו קב' פתוחה מהגדרת T.

מצד שני, $[a,b)^c=(-\infty,a)\cup[b,\infty)=\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,a)\right)\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[b,b+n)\right)$ וזו קב' פתוחה ב-T.

לכן $[a,b)$ סגוחה, אז $(\mathbb{R},T)$ לא קשיר.

**תרגיל:** מצאו סדרה שמתכנסת ב-$\mathbb{R}$ אבל לא ב-$(\mathbb{R},T)$.

(הרעיון שיש כאלה כי ב-$(\mathbb{R},T)$ יש יותר פתוחות מב-$\mathbb{R}$, לכן יותר "בעיות" התכנסות - קב' פתוחות שבהן לא יהיו האיברים.)

**פתרון:** לדוגמה, $\{-\frac{1}{n}\}$. ב-$\mathbb{R}$: $0 \xleftarrow{n\to\infty} -\frac{1}{n}$. ב-$(\mathbb{R},T)$, $[0,\infty)$ סביבה פתוחה של 0, אך לכל n, $-\frac{1}{n}\notin[0,\infty)$ לכן $-\frac{1}{n}\not\to 0$.

<u>תרגיל</u>: יהי $X$ מ"ט. תהיינה $A,B\subseteq X$ פתוחות (אפשר גם סגורות).

נניח ש- $A\cap B$ , $A\cup B$ מרחבים קשירים. הוכח ש-$A,B$ קשירות.

<u>הערה</u>: באינפי 3 ראינו הפרכה לכך ש-$A,B$ לא קשירות בלי התנאים על - $A\cup B$, $A\cap B$.

<u>פתרון</u>: נוכיח ש-$A$ קשיר. נניח בשלילה ש-$A$ לא קשיר.

לכן קיימות $U,V\subseteq A$ פתוחות זרות ולא ריקות וכך $A=U\cup V$

$A$ פתוחה לכן $U,V\subseteq X$ פתוחות. כעת $A\cap B=(U\cup V)\cap B=(U\cap B)\cup(V\cap B)$.

אם כן, $A\cap B$ מתפרק לשתי קב' פתוחות (ב- $A\cap B$).

$U,V$ זרות לכן מכיוון ש- $A\cap B$ קשיר, בה"כ $U\cap B=A\cap B$, $V\cap B=\emptyset$.

כעת, $A\cup B=(U\cup V)\cup B=U\cup V\cup B$. אז $A\cup B$ מתפרק ל-2 קב' פתוחות $V$, $U\cup B$.

שתי קב' אלה לא ריקות ($V$ לא ריקה, $U$ לא ריקה לכן גם $U\cup B$ לא ריקה).

הקב' האלה זרות, מכיוון ש- $V\cap(U\cup B)=(V\cap U)\cup(V\cap B)=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$.

לכן נקבל $A\cup B$ לא קשירה, בסתירה! לכן בהכרח $A$ קשירה. כמו כן גם $B$ קשירה.

**הגדרה:** יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט ותהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$. נאמר ש-$f$ $\boxed{\text{הומיאומורפיזם}}$ אם:

1. $f$ הפיכה.
2. $f$ רציפה.
3. $f^{-1}$ רציפה.

במצב כזה נאמר ש-$(X,\tau),(Y,\sigma)$ $\boxed{\text{הומיאומורפים}}$ ונסמן $X\cong Y$.

**הערה:** אינטואיטיבית, מרחבים הם הומיאומורפים אם אפשר להגיע מאחד לשני ע"י מתיחה, קיפול ועיקום, אבל בלי לקרוע אותו.

למשל- קו לא הומיאומורפי למעגל, כי צריך לקרוע מעגל כדי להגיע לקו.

אוי זה מעניין. כאן יש כמה דוגמות- Rn לא הומיאומורפי ל-R כי את R הופכים ללא קשיר ע"י הסרת נקודה, ואילו Rn נשאר קשיר בלי נקודה אחת בו (צמצום הומיאומורפיזם הוא גם הומ').
מעגל פחות נקודה הומיאומורפי לקו. כדור פחות נקודה זה מישור. לולאה לא הומיאומורפית למעגל בגלל הורדת הנקודה המקשרת.

**תרגיל:** יהיו $m,c\in\mathbb{R}$. נגדיר את המרחב ב-$\mathbb{R}^2$ $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y=mx+c\}$.

הוכח ש-$X$ הומיאומורפי ל-$\mathbb{R}$ (הקווים- $X$ ו-$\mathbb{R}$ של אותה צורה).

**פתרון:** נתבונן בפונק' ההטלה על הרכיב הראשון $p_1:X\to\mathbb{R}$.

$p_1$ הפיכה: $p_1^{-1}:\mathbb{R}\to X$ ע"י $p_1^{-1}(x)=(x,mx+c)$.

$p_1$ רציפה: $p_1$ היא צמצום של $p_1|_X:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. ההטלה $p_1$ רציפה לכן $p_1$ רציפה.

$p_1^{-1}$ רציפה: תהי $x\in\mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon>0$. נבחר: $\delta=\begin{cases}\min\{\frac{\varepsilon}{|m|},\varepsilon\}, & m\neq 0\\ \varepsilon, & m=0\end{cases}$

ואז לכל $y\in\mathbb{R}$, אם $|x-y|<\delta$ אז-

$$d_{max}(f(x),f(y))=d_{max}((x,mx+c),(y,mx+y))=$$
$$=\max\{|x-y|,m|x-y|\}<\max\{\delta,m\delta\}=\varepsilon$$

לכן $f=p^{-1}$ רציפה

לכן $p_1$ הומיאומורפיזם.

**הגדרה:** יהיו $X,Y$ מ"ט. ותהי $f:X\to Y$ פונ' ו- $p\in X$ נק' כלשהי.

נאמר ש-$f$ רציפה בנק' $p$ אם לכל סביבה $U$ של $f(p)$ קיימת סביבה $V$ של $p$ כך ש- $f(V)\subseteq U$.

$f:X\to Y$ רציפה אם $f$ רציפה לכל $x\in X$.

**משפט:** $f$ רציפה $\Longleftrightarrow$ לכל $U\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה.

**תרגיל:** תהיינה שני מ"ט, $X=\{a,b\}$, $Y=\{a,b,c\}$. עם הטופולוגיות: $\tau_X=\{X,\emptyset\}$, $\tau_Y=\{\emptyset,Y,\{c\}\}$

נגדיר $f:X\to Y$ ע"י $f(b)=a$, $f(a)=c$.

הוכח ש-$f$ רציפה ב-$b$ ולא רציפה ב-$a$.

**פתרון:** נראה ש-$f$ רציפה ב-$b$. $f(b)=a$. הסביבה הפתוחה היחידה של $f(b)$ היא $Y$.

$X$ סביבה של $b$ ומתקיים $f(X)\subseteq Y$, לכן $f$ רציפה ב-$b$.

$f$ לא רציפה ב-$a$. מתקיים ש-$\{c\}$ סביבה פתוחה של $f(a)=c$.

הסביבה היחידה של $a$ היא $X$ ו- $f(X)=\{a,c\}\nsubseteq\{c\}$, לכן $f$ לא רציפה ב-$a$.

**הגדרה:** יהיו $X,Y$ מ"ט. נאמר ש- $f:X\to Y$ הומיאומורפיזם, אם:

1. $f$ הפיכה.
2. $f$ רציפה.
3. $f^{-1}$ רציפה.

**הערה:** יהיו $X,Y$ מ"ט ותהי $f:X\to Y$. $f$ נקראת $\boxed{\text{פתוחה}}$ / $\boxed{\text{סגורה}}$ אם לכל $U\subseteq X$ פתוחה/סגורה

$f(U)\subseteq Y$ פתוחה/סגורה.

כלומר - תמונה של פתוחה/סגורה היא פתוחה/סגורה.

**טענה:** $f:X\to Y$ היא הומיאומורפיזם אם: 1. $f$ הפיכה

2. $f$ רציפה.

3. $f^{-1}$ רציפה / $f$ פתוחה / $f$ סגורה.

בשלוש השקילויות נובעות מזה שאם f פתוחה אזי פתוחה עוברת לפתוחה, ובמונחי הפכית מקור של פתוחה פתוח, ומכאן רציפות ההפכית.

**תרגיל:** יהי $f:X\to Y$ פונ' רציפה. נתבונן ב-$f(X)$ כתת מרחב של $Y$.

א. הוכח שאם $f$ פתוחה/סגורה כפונ' $f:X\to Y$, אז $f$ פתוחה/סגורה כפונ' $f:X\to f(X)$.

**פתרון:** נניח $f:X\to Y$ פתוחה. יהי $U\subseteq X$ פתוחה. נראה ש-$f(U)\subseteq f(X)$ פתוחה.

$f(U)$ פתוחה ב-$Y$ כי $f:X\to Y$ פתוחה. $X\subseteq X$ פתוחה לכן גם $f(X)\subseteq Y$ פתוחה.

$\leftarrow$ לכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$ פתוחה ב-$f(X)$.

ב. הראו שאם $f:X\to f(X)$ פתוחה/סגורה, $f:X\to Y$ לא בהכרח פתוחה/סגורה.

**פתרון:** נתבונן למשל ב-$X=\mathbb{Q},\ Y=\mathbb{R}$ ו- $f:X\to Y$ העתקת ההכלה - $f(x)=x$.

$f(X)=X$ ו- $f:X\to f(X)$ היא בעצם העתקת הזהות לכן פתוחה וסגורה.

אך $X\subseteq X$ פתוחה ו- $f(X)\subseteq Y$ $(\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R})$ לא פתוחה ולא סגורה.

לכן $f:X\to Y$ לא פתוחה ולא סגורה.

**תרגיל:** קבע לגבי הפונ' הבאות אם הן פתוחות, סגורות, רציפות.

א. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י -
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

**פתרון:** $f$ לא רציפה ב-$x=0$ $\leftarrow$ לפי היינה $\frac{1}{n}\to 0$ אבל $f(\frac{1}{n})\not\to f(0)$.

$f$ לא פתוחה $\leftarrow$ $(-1,1)\subseteq\mathbb{R}$ פתוח אך $f(-1,1)=[1,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ לא פתוחה.

$f$ לא סגורה $\leftarrow$ $[1,\infty)\subseteq\mathbb{R}$ סגורה אך $f[1,\infty)=(0,1]\subseteq\mathbb{R}$ לא סגורה.

ב. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י -
$$g(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

**פתרון:** $f$ לא רציפה $\leftarrow$ $\{1\}$ סגורה ו- $\mathbb{Q}=g^{-1}(\{1\})$ לא סגורה.

$f$ לא פתוחה $\leftarrow$ לכל $A\subseteq\mathbb{R}$, $f(A)=\{0\}$ או $f(A)=\{1\}$ או $f(A)=\{0,1\}$ ובכל מקרה $f(A)$ לא פתוחה.

$f$ סגורה $\leftarrow$ לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ כנ"ל ולכן $f(A)$ סגורה בכל מקרה.

**תרגיל:** יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. יהי $a\in X$ ויהי $\varepsilon>0$. הראה ש-$B(a,\varepsilon)\cong B(0,1)$ $(\subseteq X)$.

תרגיל: יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי. יהי $a\in X$ ויהי $\varepsilon>0$. הראה ש- (ב-X) $B(a,\varepsilon)\cong B(0,1)$ (ב-X)

פתרון: נוכיח זאת בשלבים:

א. נוכיח ש- $f:(X,\|\cdot\|)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ היא רציפה.

יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$. לכל $y\in X$ כך ש- $\|x-y\|<\delta$ מתקיים:

$$|f(x)-f(y)|=\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|<\delta=\varepsilon$$

למה.

נשים לב ש: $\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$:

$$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|\Rightarrow\|x\|-\|y\|\le\|x-y\|$$
$$\|y\|=\|y-x+x\|\le\|y-x\|+\|x\|\Rightarrow\|y\|-\|x\|\le\|x-y\|$$

לכן - $\big|\|x\|-\|y\|\big|\le\|x-y\|$.

לכן $f$ רציפה בכל $x\in X$.

ב. נראה שפונ' ההזזה $g:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|)$ המוגדרת ע"י - $g(x)=x+a$ היא רציפה.

יהי $x\in X$. נראה ש-$g$ רציפה ב-$x$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$.

אם $\|x-y\|<\delta$ אז - $\|g(x)-g(y)\|=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|<\delta=\varepsilon$.

ג. נראה שלכל $c$, הפונק' $h:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|)$ המוגדרת ע"י - $h(x)=cx$ היא רציפה.

אם $c=0$, $h$ קבועה ולכן רציפה.

אם $c\neq0$, לכל $\varepsilon>0$ נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{|c|}$ ונקבל את הדרוש

ד. נראה שלכן $B(a,\varepsilon)\cong B(0,1)$.

נגדיר - $F:B(a,\varepsilon)\to B(0,1)$ ע"י $F(x)=\frac{1}{\varepsilon}(x-a)$. $F$ רציפה כהרכבת רציפות.

$F^{-1}:B(0,1)\to B(a,\varepsilon)$ מוגדרת ע"י - $F^{-1}(x)=\varepsilon x+a$. וכן $F^{-1}$ רציפה כהרכבת רציפות.

לכן $F$ הומיאומורפיזם.

**הגדרה:** יהי X מ"ט ו- $A\subseteq X$ קבוצה.

* נגדיר את $\boxed{\text{הסגור}}$ של $A$: $cl(A)=\bar{A}=\bigcap_{\substack{A\subseteq S \\ S \text{ סגורה}}} S$ חיתוך כל הקב' הסגורות המכילות את $A$.

אפיון: $cl(A)$ היא הקב' הסגורה המינימלית המכילה את $A$.

$p\in cl(A) \iff$ לכל סביבה $U$ של $p$, $U\cap A\neq\emptyset$.

* נגדיר את $\boxed{\text{הפנים}}$ של $A$: $int(A)=\mathring{A}=\bigcup_{\substack{V\subseteq A \\ V \text{ פתוחה}}} V$ איחוד כל תתי הקב' הפתוחות המוכלות ב-$A$.

אפיון: $int(A)$ היא הקב' הפתוחה המקסימלית שמוכלת ב-$A$.

$p\in int(A) \iff$ קיימת $U$ פתוחה כך ש- $p\in U\subseteq A$.

* נגדיר את $\boxed{\text{השפה}}$ של $A$: $\partial A=cl(A)\setminus int(A)$.

**תרגיל:** מצא סגור ופנים של הקב' $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\neq 0\}$.

**פתרון:** נראה שהסגור הוא $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0\}$.

$B$ סגורה, $A\subseteq B$ ולכן $\underline{cl(A)\subseteq B}$.

לצד שני - תהי $p\in B$. נ"ל $p\in cl(A)$. אם $p\in A$ אז $p\in cl(A)$.

אם $p\notin A$ אז בהכרח $p=(x,0)$, $x\geq 0$. נתבונן ב $B(p,\varepsilon)$ לכל $\varepsilon$.

$B(p,\varepsilon)\ni (x,\frac{\varepsilon}{2})\in A$ ולכן $A\cap B(p,\varepsilon)\neq\emptyset$ ולכן $p\in cl(A)$. לכן $\underline{B\subseteq cl(A)}$ וסיימנו.

נראה שהפנים הוא- $int(A)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0,\ y\neq 0\}$. שוב לפי הכלה דו-כיוונית לפי האפיון הנ"ל.

**הגדרה:** יהי X מ"ט, ותהי $A\subseteq X$. $\boxed{\text{הסגור הסדרתי}}$ של $A$ הוא $scl(A)=\{p\in X \mid \exists \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A: x_n\to p\}$.

כלומר - כל הגבולות של סדרות ב-$A$. מתקיים $A\subseteq scl(A)$.

**תרגיל:** יהי $(X,d)$ מ"מ, ותהי $A\subseteq X$. הראה ש- $cl(A)=scl(A)$.

**פתרון:** תהי $p\in scl(A)$. קיימת $\{x_n\}\subseteq A$ כך ש- $x_n\to p$. לכל $U$ סביבה של $p$, קיים $n_0$ כך שלכל $n\geq n_0$, $x_n\in U$. בפרט, $U\cap A\neq\emptyset$ ולכן $p\in cl(A)$.

← # כיוון זה נכון לכל מ"ט ← $scl(A)\subseteq cl(A)$.

לכיוון השני, תהי $p\in cl(A)$. אם $p\in A$ אז $p\in scl(A)$. אם $p\notin A$, לכל $n$, $B(p,\frac{1}{n})\cap A\neq\emptyset$.

לכל $n$, נבחר $x_n\in B(p,\frac{1}{n})\cap A$. $x_n\in A$ ו- $0\leq d(x_n,p)\leq\frac{1}{n}\to 0$.

זה למה חשובה המטריקה. ככה גם אפשר לשלול שמרחב הוא מטריזבלי

לכן, $d(x_n,p)\to 0$, כלומר- $x_n\to p$ ולכן $p\in scl(A)$.

← # מרחב שבו $scl(A)=cl(A)$, לכל $A$, נקרא אותו פרשה-אוריסון.

טענה: יהיו $X,Y$ מ"ט ו- $f:X\to Y$ הומיאו. אזי, לכל $A\subseteq X$, $f(int(A))=int(f(A))$

תרגיל: $f(cl(A))=cl(f(A))$

פתרון: תזכורת, ראינו ש- $int(A^c)=(cl(A))^c$ , $cl(A^c)=(int(A))^c$

נוכיח את השוויון הראשון: $(cl(A))^c=(\bigcap_{\substack{A\subseteq S\\ \text{סגורה}}} S)^c=\bigcup_{\substack{S^c\subseteq A^c\\ \text{פתוחה}}} S^c=\bigcup_{\substack{V\subseteq A^c\\ \text{פתוחה}}} V=int(A^c)$

כעת, $f(cl(A))=f((cl(A))^c)^c\underset{\text{הפיכה } f}{=}(f((cl(A))^c))^c=(f(int(A^c)))^c=(int(f(A^c)))^c=cl(f(A^c)^c)\underset{\text{הפיכה}}{=}cl(f(A))$

הגדרה: יהי $X$ מ"ט ותהי $A\subseteq X$. נאמר ש-$A$ צפופה ב-$X$, אם $cl(A)=X$.

טענה: $A\subseteq X$ היא צפופה, אם לכל $U\subseteq X$ פתוחה ולא ריקה, $U\neq\emptyset$, $A\cap U\neq\emptyset$.

דוגמה: $\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$.

תרגיל: נתבונן בטופולוגיה $(\mathbb{R}, T_{cof})$. נזכיר כי- $T_{cof}=\{O\subseteq\mathbb{R} \mid |O^c|<\infty\}\cup\{\emptyset\}$

א. הוכיחו שלכל $A\subseteq\mathbb{R}$, $A$ פתוחה או $int(A)=\emptyset$.

פתרון: נראה שאם $int(A)\neq\emptyset$, $A$ פתוחה. $int(A)$ פתוחה ולכן: $|(int(A))^c|<\infty$.

$int(A)\subseteq A$, $A^c\subseteq(int(A))^c$ ולכן גם $|A^c|<\infty$ ולכן, $A$ פתוחה.

ב. הראו שכל קבוצה אינסופית $A$ היא צפופה.

פתרון: תהי $A$ אינסופית. $cl(A)$ סגורה, כלומר, $(cl(A))^c$ פתוחה. הקבוצות הסגורות היחידות הן $X$ והסופיות. cl(A) מכילה את A על כן היא איננה סופית. בהכרח cl(A)=X וחסל.

# תכונות / אקסיומות ההפרדה

מה בין T0 ו-T1 אתם שואלים?
ובבן T0 לא מבדילה בין הנקודות שבדרישה,
ואילו T1 כן.

<u>הערה:</u> נאמר שX הוא:

א. $T_0$ אם לכל $a,b\in X$ שונות קיימת $U,V$ סביבות של $a,b$ כך ש- $a\notin V$ או $b\notin U$.

<u>לדוגמה:</u> מ"ט $\boxed{\text{טריוויאלי}}$ אינו $T_0$. מ"ט שהוא $T_0$ נקרא $\boxed{\text{קולמוגורוב}}$.

ב. $T_1$ אם לכל $a,b\in X$ שונות קיימת $U,V$ סביבות של $a,b$ כך ש- $a\notin V$ וגם $b\notin U$.

<u>לדוגמה:</u> מרחב $\boxed{\text{שרפינסקי}}$ : $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\emptyset, X, \{a\}\}$.

$a\in\{a\}$ אך $b\notin\{a\}$ ולכן זהו מרחב $T_0$.

אין קבוצה פתוחה (סביבה) של b ש-a לא נמצא בה, ולכן זה לא מרחב $T_1$.

מרחב שהוא $T_1$ נקרא מרחב $\boxed{\text{פרשה}}$

התקדמנו- הסביבות לא רק שלא מכילות את הנקודה האחרות, אלא הן לא נחתכות ממש!

ג. $T_2$ אם לכל $a,b\in X$ שונות קיימת $U,V$ סביבות של $a,b$ כך ש- $U\cap V=\emptyset$.

<u>לדוגמה:</u> מ"ט $\boxed{\text{קו-סופי}}$ (על $\mathbb{R}$).

ק' היא פתוחה אם המשלים שלה סופי ולכן חיתוך של פתוחות לא יכול להיות ק' ריקה.

זהו מרחב $T_1$ כי $\mathbb{R}\setminus\{b\}\ni a$ ו-$\mathbb{R}\setminus\{a\}\ni b$ מקיימת את הדרוש מ-$T_1$.

$T_2$ נקרא מרחב $\boxed{\text{האוסדורף}}$

* $T_{2\frac{1}{2}}$ - מרחב $\boxed{\text{אוריסון}}$ הפרדה ע"י קבוצות סגורות. טיפה יותר חזק מT2

ד. $T_3$ אם הוא $T_1$ ולכל F סגורה ו-$a\notin F$ קיימת סביבות $U,V$ כך ש- $a\in U$, $F\subseteq V$, $U\cap V=\emptyset$.

כלומר - אפשר להפריד (ע"י סביבות) נק' וק' סגורה.

מרחב שהוא $T_3$ נקרא מרחב $\boxed{\text{רגולרי}}$

ה. $T_4$ אם הוא האוסדורף ולכל $F,S$ סגורות וזרות, קיימות $U,V$ פתוחות כך ש- $S\subseteq U$, $F\subseteq V$, $U\cap V=\emptyset$.

כלומר - אפשר להפריד ק' סגורות.

מרחב שהוא $T_4$ נקרא מרחב $\boxed{\text{נורמלי}}$

<u>הערה:</u> מה מקיים את כל תכונות ההפרדה?

<u>תרגיל</u>: יהי X מ"ט. הוכח שX הוא $T_4$, אמ"מ הוא $T_1$ ו

לכל $F\subseteq X$ סגורה ו-$U\subseteq X$ פתוחה כך ש- $F\subseteq U$, קיימת V פתוחה כך ש- $F\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq U$.

<u>פתרון</u>: X $T_4$ ולכן $T_1$.

תהי F סגורה ו-U פתוחה כך ש- $F\subseteq U$. לכן $U^c$ סגורה ו- $U^c\subseteq F^c$.

כמו ששמחה היה אומר- זה טריק זול

$F,U^c$ הן ק' סגורות ומכיוון ש- $F\subseteq U$ אז $F\cap U^c=\emptyset$.

X הוא $T_4$ לכן קיימות $V,W$ פתוחות כך ש- $F\subseteq V$, $U^c\subseteq W$, $V\cap W=\emptyset$.

מכיוון ש- $V\cap W=\emptyset$, נקבל $V\subseteq W^c$ ו-$W^c$ סגורה. לכן גם $cl(V)\subseteq W^c$.

קיבלנו, $U^c\subseteq W$ ולכן $W^c\subseteq U$. נקבל - $F\subseteq V\subseteq cl(V)\subseteq (W^c)\subseteq U$ כנדרש.

<u>הערה</u>: גם הכיוון ההפוך נכון - כלומר, אם X הוא $T_1$ ומקיים את התנאי הנ"ל, אז הוא $T_4$.

<u>תרגיל</u>: א. יהי $(X,\tau)$ מ"ט סופי. הוכח שאם X הוא $T_1$ אז הוא $T_2$.

<u>פתרון</u>: נראה שמרחב שהוא סופי וגם $T_1$ הוא דיסקרטי.

מספיק להראות שכל נקודון הוא סגור כי במקרה כזה כל קב' היא סגורה ולכן כל ק' תהיה פתוחה

יהי $a\in X$. צ"ל - $\{a\}^c\in\tau$.

נתבונן ב- $a\neq b$ ב-X. לכל b כזה קיימת קב' פתוחה $U_b$ כך ש- $b\in U_b$ ו- $\{a\}\cap U_b=\emptyset$.

אם כן, גם $\bigcup_{b\in X\setminus\{a\}} U_b$ קב' פתוחה. $a\notin\bigcup U_b$ ולכל b אחר, $b\in\bigcup U_b$, ולכן $\{a\}^c=\bigcup U_b$.

<u>מסקנה</u>: במרחב $T_1$ סופי כל נקודון הוא סגור.

ב. יהיו X,Y מ"ט ו-Y האוסדורף. הראו שאם קיימת $f:X\to Y$ רציפה וחח"ע אז X האוסדורף.

<u>פתרון</u>: תהיינה $a,b\in X$ שונות. f חח"ע ולכן $f(a)\neq f(b)$.

Y האוסדורף ולכן קיימות $U,V\subseteq Y$ פתוחות כך ש- $f(b)\in V$, $f(a)\in U$, $U\cap V=\emptyset$.

f רציפה לכן גם $f^{-1}(U),f^{-1}(V)$ פתוחות ומקיימות- $b\in f^{-1}(V)$, $a\in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)=f^{-1}(U\cap V)=\emptyset$.

לכן X האוסדורף כנדרש.

אם היינו לוקחים סתם סגורות ולא סביבות סגורות (סגורות), היינו מקבלים $T_1$ ולא האוסדורף

ג. הראו שמ"ט הוא האוסדורף $\Longleftrightarrow$ לכל $x\in X$ מתקיים $\bigcap_{x\in S \text{ ו-S סגורה}} S=\{x\}$

<u>פתרון</u>: נניח בשלילה שקיים x כך שקיים $y\in\bigcap S$, $y\neq x$. מכיוון האוסדורף לכן קיימות $U,V$ פתוחות זרות,

לא ברור למה

כי הן סגוחות

כך ש- $y\in U$, $x\in V$, ו-$U^c$ ק' סגורה. בנוסף $U^c$ סביבה סגורה, $x\in U^c$, $y\notin U^c$ ולכן בחיתוך $y\notin\bigcap S$.

לכיוון השני, תהיינה $x,y\in X$ שונות. מתקיים- $\bigcap_{x\in S \text{ ו-S סגורה}} S=\{x\}$, $\bigcap_{y\in S \text{ ו-S סגורה}} S=\{y\}$.

לכן קיימת סביבה סגורה F של x כך ש- $y\notin F$. $y\in F^c$ סביבה של y, $F\cap F^c=\emptyset$ ולכן X הוא $T_2$.

**הגדרה:** יהי $X$ מ"ט ותהי $a\in X$. נאמר ש-$B$ הוא $\boxed{\text{בסיס מקומי}}$ של $a$ ($B\subseteq P(X)$), אם:

1. כל איברי $B$ הם סביבות של $a$.
2. לכל $U$ סביבה של $a$ קיימת $V\in B$ כך ש- $a\in V\subseteq U$.

(בסיס מקומי של $a$ בעצם מגדיר את ההתכנסות ל-$a$: במקום לעבור על כל הסביבות של $a$, מספיק לעבור על הבסיס.)

**הגדרה:** מ"ט $X$ מקיים את $\boxed{\text{אקסיומת/תכונת המניה הראשונה}}$ (מסומן $B_1$ או $C_I$), אם לכל $x$ יש בסיס מקומי בן מניה.

**הערה:** 1. כל מרחב $B_1$ הוא פרשה-אוריסון (FU).

2. לא כל מרחב FU הוא $B_1$.

המשלים לסביבה פתוחה של X הוא סגור ולכן סופי,
משמע במשלים יש מספר סופי של איברי הסדרה,
ולכן בסביבה עצמה יש אינסוף מאיברי הסדרה

**דוגמא:** $(\mathbb{R},\tau_{cof})$ הוא FU אבל לא $B_1$.

נוכיח שזה מרחב FU. לשם כך צריך להוכיח $scl(A)=cl(A)$.

תהי $p\in cl(A)$. אם $A$ סופית, $A=cl(A)$ ואז $A=cl(A)=scl(A)$.

אם $A$ אינסופית, הסגורה היחידה המכילה אותה היא $\mathbb{R}$ ולכן $cl(A)=\mathbb{R}$.

מכיוון ש-$A$ אינסופית, אפשר לבחור סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ שאיבריה שונים.

לכל $x\notin A$ אפשר להגדיר $U_n=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}\{x_i\}$ זו סביבה של $x$, והחל מ-$n$, $x_m\in U_n$ ($m\geq n$),

ולכן $x_n\xrightarrow{\tau_{cof}}x$. אם $x\in A$ אפשר לקחת סדרה קבועה שמתכנסת אליו.

לכן $scl(A)=\mathbb{R}$. בסה"כ $(X,\tau_{cof})$ הוא FU.

נוכיח שזה לא מרחב $B_1$. תהי $a\in\mathbb{R}$ ונניח בשלילה שיש לה בסיס מקומי בן מניה.

נסמן $B=\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. $|U_i^c|<\infty$ לכל $i$, לכן $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i^c$ בת מניה.

נבחר $b\notin\bigcup_{i\in\mathbb{N}}U_i^c$. $\{b\}^c$ קב' פתוחה. לכל $U_i$, $b\in U_i$ ו-$b\notin\{b\}^c$ ולכן לא קיימת $U_i\in B$,

כך ש- $a\in U_i\subseteq\{b\}^c$ ולכן זה לא בסיס.

לפי דה מורגן נקבל ש-b נמצאת בחיתוך
כל ה-Ui. מותר לנו לבחור b שכזו שכן
איחוד המשלימות בן מנייה ואילו המרחב לא
בן מנייה

**דוגמא:** הישר של סורגנפריי הוא $B_1$.

## תכונות של פונקציות רציפות

**משפט:** יהיו $X,Y$ מ"ט ותהי $f:X\to Y$ רציפה. אז:

א. אם $A$ קומפקטית אז $f(A)$ קומפקטית

ב. אם $A$ קשירה אז $f(A)$ קשירה.

**תרגיל:** נתבונן ב- $GL_n(\mathbb{R})\subseteq M_n(\mathbb{R})$. האם $GL_n(\mathbb{R})$ קשיר?

**פתרון:** הפונקציה $\det: M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה (כפולינום).

$\det(GL_n(\mathbb{R}))=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ אבל $\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ זה פירוק לשתי קב' זרות ופתוחות שמכסה את $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ולכן $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ לא קשיר. לכן גם $GL_n(\mathbb{R})$ לא קשיר.

**תרגיל:** (ממבחן) תהי $f:S^1\to\mathbb{R}$. הוכח $f(S^1)$ הוא קטע סגור.

מעגל היחידה.

**פתרון:** $S^1\subseteq\mathbb{R}^2$ סגורה וחסומה. לכן $S^1$ קומפקטית. $f$ רציפה לכן גם $f(S^1)$ קומפקטית לכן $f(S^1)\subseteq\mathbb{R}$ סגורה וחסומה (כי $\mathbb{R}$ מרחב מטרי). $S^1$ קשירה לכן גם $f(S^1)$ קשיר.

קב' סגורה, חסומה וקשירה ב-$\mathbb{R}$ היא קטע סגור.

## בסיס

**הגדרה:** יהי $(X,\tau)$ מ"ט. נאמר שאוסף $B\subseteq\tau$ הוא $\boxed{\text{בסיס}}$ של $\tau$,
אם כל קב' ב-$\tau$ היא איחוד של קב' ב-$B$.
במילים אחרות, לכל $x\in X$ ולכל $x\in U\in\tau$ קיימת $V\in B$ כך ש- $x\in V\subseteq U$.

**דוגמאות:**

1. ב-$\mathbb{R}$, קטעים פתוחים הם בסיס (אפשר גם רק קטעים עם קצוות רציונאליים).
2. ב-$\mathbb{R}^2$, כדורים פתוחים עם מרכז רציונאלי ורדיוס רציונאלי הם בסיס.
3. בישר של סורגנפריי, קטעים חצי-פתוחים $[a,b)$ הם בסיס.

**הערה:** בסיס שקול "להחליף" את הטופולוגיה בהרבה תכונות.
כלומר במקום להתבונן בכל $U\in\tau$, מספיק להתבונן בכל $V\in B$.

(אפשר להחליף רק כשמדובר בכל הטופולוגיה ואנו עוברים לכל הבסיס)

**לדוגמא:**

1. במ"ט $(X,\tau)$, תהי $A$ תת קב' של $X$, ו-$B$ בסיס של $\tau$.
ידוע ש- $p\in cl(A) \iff$ לכל $p\in U\in\tau$ מתקיים $U\cap A\neq\emptyset$.
אז אפשר להגיד: $p\in cl(A) \iff$ לכל $p\in V\in B$ מתקיים $V\cap A\neq\emptyset$.
2. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ פונק'.
$f$ נקראת פתוחה, אם לכל $U\in\tau$, $f(U)\in\sigma$.
כמו כן $f$ פתוחה אם לכל $V\in B$, $f(V)\in\sigma$ (כאשר $B$ בסיס של $\tau$).

**תרגיל:** א. הראה שכל טופולוגיה היא בסיס.
**פתרון:** כל טופולוגיה היא בסיס של עצמה.

ב. הראה שאם $C$ הוא אוסף של קב' פתוחות ב-$(X,\tau)$ המכיל בסיס $B$ לה, אז $C$ בסיס ל-$\tau$.
**פתרון:** $C$ אוסף של קב' פתוחות. יהי $x\in X$ ו- $U\in\tau$ כך ש- $x\in U$. $B$ בסיס לכן קיימת $V\in B$ כך ש- $x\in V\subseteq U$. $B\subseteq C$ לכן $V\in B$ ולכן $C$ בסיס.

ג. יהיו $\tau_1,\tau_2$ טופולוגיות על $X$. יהי $B_1$ בסיס של $\tau_1$. אז $\tau_1\subseteq\tau_2 \iff B_1\subseteq\tau_2$.
**פתרון:** $\Leftarrow$ $B_1\subseteq\tau_1$ לכן אם $\tau_1\subseteq\tau_2$ נקבל $B_1\subseteq\tau_2$.
$\Rightarrow$ $B_1\subseteq\tau_2$. יהי $U\in\tau_1$. $B_1$ בסיס לכן קיימת $\{U_i\}_{i\in I}\subseteq B$ כך ש- $U=\bigcup_{i\in I}U_i$
לכן $U$ איחוד של קב' פתוחות ב-$\tau_2$ ולכן $U\in\tau_2$ כנדרש.

תרגיל: תהי $X=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ונגדיר - $B_1=\{\{n\}\mid n\in\mathbb{Z}\}$, $B_2=\{Z\subseteq X\mid X\setminus Z=\{1,\dots,n\}, n\in\mathbb{N}\}$.

א. הוכח ש-$B=B_1\cup B_2$ הוא בסיס לטופולוגיה (כלשהי) על $X$.

פתרון: ראשית, $X\setminus\{1\}\in B$, $\{1\}$ ולכן $\bigcup_{V\in B}V=X$.

(נשים לב שאיבר ב-$B_2$ הוא מהצורה $\{\dots,n+1,n\}\cup\{0\}$ כך ש-$\{1,\dots,n\}=X\setminus Z$).

כעת, יש להראות ש-$B$ סגור לחיתוך סופי. מספיק להסתכל על $C,D\in B$ קבוצות.

נחלק למקרים - $\underbrace{C,D\in B_1}_{C\cap D \text{ ב-} B_1 \text{ או } \phi}$ או $\underbrace{C,D\in B_2}_{C\cap D=X\setminus\{1,\dots,\max\}\in B_2}$ או $\underbrace{C\in B_1 \text{ ו-} D\in B_2}_{C\cap D \text{ ב-} B_1 \text{ או } \phi}$.

האיבר שבו $n$ יותר גדול

והראינו שהחיתוך של 2 איברים מהבסיס נשאר בטופולוגיה (או ב-$B$ או $\phi$).

האיחוד טריוויאלי - צריך להוכיח שאיחוד של איברים ב-$B$ נשאר בטופולוגיה, אבל זו הגדרת בסיס.

אז בעצם אם נגדיר טופולוגיה לפי איחודים של איברים ב-$B$, זאת תהיה טופולוגיה ו-$B$ יהיה הבסיס שלה.

ב. הראו שאם הטופולוגיה המושרית מהבסיס, $(X,\tau)$ מ"ט האוסדורף.

פתרון: $(X,\tau)$ הוא האוסדורף אם לכל $x\neq y$ קיימות $U,V\in\tau$ כך ש-$x\in U$, $y\in V$ ו-$U\cap V=\phi$.

אפשר לומר - לכל $x\neq y$ קיימות $U,V\in B$ (בסיס של $\tau$) כך ש-$x\in U$, $y\in V$ ו-$U\cap V=\phi$.

אז כך, יהיו $x,y\in X$, $x\neq y$. אם $x,y\neq 0$, $\{x\},\{y\}\in B$ סביבות פתוחות מתאימות ב-$B$.

אם בה"כ $y=0$, הסביבה המתאימה ל-$x$ היא $\{x\}$. סביבה מתאימה ל-$y$ היא למשל $\{2x,2x+1,\dots\}\cup\{0\}$, ולכן $(X,\tau)$ האוסדורף.

הגדרה: יהי $(X,\tau)$ מ"ט. נאמר ש:

1. $X$ הוא $\boxed{B_2}$ אם קיים ל-$\tau$ בסיס בן מניה.
2. $X$ הוא $\boxed{\text{ספרבילי}}$, אם קיימת $A\subseteq X$ צפופה בת מניה.

דוגמא: $\mathbb{R}^n$ הוא $B_2$ (עם הבסיס $B(\vec{q},p)$ כאשר $p\in\mathbb{Q}$ ו-$\vec{q}\in\mathbb{Q}^n$ כמו שאמרנו קודם).
$\mathbb{R}^2$ ספרבילי כי $\mathbb{Q}^2$ צפופה בו.

תרגיל: הראה שבמרחב ספרבילי, אוסף של קב' פתוחות זרות בזוגות הוא בן מניה.

פתרון: תהי $A\subseteq X$ צפופה בת מניה. יהי $\{V_i\}_{i\in I}$ אוסף כנ"ל (קב' פתוחות זרות בזוגות).
מכיוון ש-A צפופה, $A\cap V_i\neq\emptyset$ לכל $i\in I$. נסמן $x_i\in A\cap V_i$ לכל $i$.
מכיוון שאם $i\neq j$ אז $V_i\cap V_j=\emptyset$, נקבל שאם $i\neq j$, $x_i\neq x_j$.
$x_i\in A$ ו-$A$ בת מניה לכן $\{x_i\}_{i\in I}$ בת מניה, לכן גם $\{V_i\}_{i\in I}$ בת מניה.

תרגיל: הראה ש-$\ell_\infty$ עם נורמת sup אינו ספרבילי.

פתרון: נתבונן באוסף הסדרות הבינאריות, הסדרות חסומות ולכן ב-$\ell_\infty$.
לכל $(a_n),(b_n)$ בינאריות שונות: $d((a_n),(b_n))=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n-b_n|=1$, לכן אם ניקח לכל אחת כדור פתוח ברדיוס $\frac{1}{2}$ - $B((a_n),\frac{1}{2})$, הכדורים $(a_n)\neq(b_n)$ מקיימים $B((a_n),\frac{1}{2})\cap B((b_n),\frac{1}{2})=\emptyset$.
יש לנו $\aleph=2^{\aleph_0}>\aleph_0$ סדרות בינאריות לכן $\ell_\infty$ אינו ספרבילי.
(מצאנו אוסף פתוחות זרות בזוגות שאינו בן מניה).

תרגיל: יהי $X$ מ"ט דיסקרטי. האם $X$ ספרבילי?

פתרון: אם $X$ בן מניה, $cl(X)=X$ ולכן $X$ ספרבילי.
אם $X$ אינו בן מניה, מכיוון שבמרחב דיסקרטי כל קב' היא סגורה, לכן אם $cl(A)=X$ אז $A=X$ אבל $X$ אינו בן מניה לכן לא קיימת $A\subseteq X$ צפופה בת מניה.
לכן $X$ אינו ספרבילי.

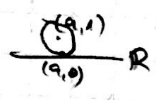
__תרגיל:__ המישור של Moore הוא קבוצת $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}$ עם הטופולוגיה שבסיסה הוא אוסף הכדורים הפתוחים שמוכלים ב- $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$, או כדורים שמשיקים לציר הx (כולל).

1. האם המרחב ספרבילי?

__פתרון:__ כן, עם $\mathbb{Q}^2$.

2. נתבונן ב-$\mathbb{R}\subseteq M$ כתת מרחב של המישור. האם $\mathbb{R}$ ספרבילי? ($\mathbb{R}$ הוא ציר ה-x).

__פתרון:__ לכל $\{a\}\subseteq\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{R}\cap\underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-a)^2+(y-1)^2\leq 1\}}_{\text{כדור שמשיק ל-}\mathbb{R}\text{ ב-}(a,0)}$




לכן כל $\{a\}$ הוא קב' פתוחה (מהגדרת טופולוגיית תת המרחב כחיתוך פתוחה).

לכן $\mathbb{R}$ דיסקרטי, אז $\mathbb{R}$ לא ספרבילי.

__הערה:__ אם כן, תת מרחב של מרחב ספרבילי, לא בהכרח ספרבילי.
המישור של מור הוא האוסדורף, לא $B_2$ ולא קומפקטי.

__משפט:__ תת מרחב של $B_2$ הוא $B_2$.

# חסום כליל

<u>הגדרה</u>: מרחב $(X,d)$ נקרא חסום כליל (ח"כ).

אם לכל $r>0$ יש מס' סופי של נקודות $\{x_1,\dots,x_n\}$ כך ש- $X\subseteq\bigcup B(x_i,r)$.

<u>משפטים</u>: * אם $X$ קומפקטי, אז $X$ ח"כ. (קומפקטי $\Longleftrightarrow$ שלם וח"כ - פחות חשוב).

* יהי $A\subseteq X$. אם $cl(A)$ קומפקטית, $A$ ח"כ.

* ח"כ $\Longrightarrow$ חסום.

<u>לדוגמא</u>: נתבונן ב- $(\mathbb{R},d_{disc})$. $\mathbb{R}$ חסום, כי למשל $\mathbb{R}\subseteq B(0,2)$.

$\mathbb{R}$ לא ח"כ כי עבור $r=\frac{1}{2}$, לא קיים אוסף סופי של כדורים, כי $B(x,\frac{1}{2})=\{x\}$.

* במרחבים האוקלידיים $\mathbb{R}^n$, קב' היא חסומה $\Longleftrightarrow$ ח"כ.

* מ"מ הוא ספרבילי $\Longleftrightarrow$ הומאומורפי למ"מ ח"כ.

<u>תרגיל</u>: תת מרחב של ח"כ הוא ח"כ.

<u>פתרון</u>: יהי $X$ מרחב ו- $Y\subseteq X$ תת מרחב, כך ש- $X$ ח"כ. צ"ל $Y$ ח"כ.

לכל $r>0$ קיימות $\{x_1,\dots,x_n\}$ כך ש $X=\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\frac{r}{2})$.

נתבונן באוסף $Y\cap B(x_i,\frac{r}{2})$ שעבורם החיתוך לא ריק.

נבחר $y_i\in B(x_i,\frac{r}{2})\cap Y$, ואז $Y=\bigcup(B(y_i,r)\cap Y)$ וזהו אוסף סופי, כדרוש לח"כ.

<u>תרגיל</u>: יהי $f:X\to Y$ רציפה ויהי $A\subseteq X$ ח"כ. האם $f(A)$ ח"כ?

<u>פתרון</u>: לא בהכרח. נתבונן ב- $\mathbb{R}$ וב- $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\subseteq\mathbb{R}$. $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ח"כ ( $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ קומפקטי)

$tg:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ רציפה אבל $tg(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})=\mathbb{R}$ איננה ח"כ.

<u>תרגיל</u>: תהי $f:X\to Y$ רבמ"ש ויהי $A\subseteq X$ ח"כ. האם $f(A)$ ח"כ?

<u>פתרון</u>: כן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_x(x,y)<\delta$ אז $d_y(f(x),f(y))<\varepsilon$. מכאן נובע ח"כ.

<u>הערה</u>: זה עוד הבדל בין רציפות לרציפות במ"ש. כי התכונה ח"כ מתנהגת כך -
לא נשמרת עם רציפות אבל נשמרת עם רבמ"ש.
לעומת זאת, קשירות וכו' כן נשמרים עם רציפות.
פתיחות לא נשמרת.

חשוב!

**תרגיל:** הראה ש-$\ell_1$ ספרבילי.

**פתרון:** נמצא קב' צפופה בת מניה

נתבונן בקב' הסדרות שכל איבר מהם יש מס' רציונליים ואחר אפס.

כלומר איבר שם נראה כ- $a=(a_1,a_2,\dots,a_n,0,\dots)$,

זו אכן קב' בת מניה (איחוד של קב' בנות מניה - הסדרות שאחרי מקום n מתאפסות).

כדי להראות שזו קב' צפופה, מספיק להראות שכל כדור פתוח חותך את הקב' הזאת לא ריק (כדי להראות שה-$\ell_1$ הוא הסגור, ומספיק להתבונן על הבסיס).

ומכיוון ש-$\ell_1(a)\in\ell_1$ מתכנסת בהחלט, האיבר הכללי שואף ל-0.

(השלמה לתרגיל הקודם)

**תרגיל:** תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכח ש-f הומיאומורפיזם.

**הקדמה:** נראה ש-f היא פונ' פתוחה. מספיק להראות זאת על קבוצה פתוחה בסיסית
במקרה שלנו, קבוצות פתוחות בסיסיות הן קטעים פתוחים.

לכן נרצה להראות שאם $a<b$, $c<d$ אזי $f((a,b))=(c,d)$:

**פתרון:** f רציפה לכן אם $A\subseteq\mathbb{R}$ קשירה וקומפקטית, גם $f(A)$ קשירה וקומפקטית

קב' קשירה וקומפקטית ב-$\mathbb{R}$ היא קטע סגור. לכן - $f([a,b])=[c,d]$.

נראה שהקצוות הולכים לקצוות. כלומר - $f(b)=d$ וגם $f(a)=c$ או $f(b)=c$ וגם $f(a)=d$.

נניח בשלילה שזה לא כך. לכן קיים $x\in(c,d)$ כך ש $f(a)=x$ או $f(b)=x$.

בה"כ $f(a)=x$. כעת, $(a,b]$ הוא קשיר, אך $f((a,b])=[c,d]\setminus\{x\}=[c,x)\cup(x,d]$.

אבל זה לא קשיר בסתירה! לכן לא קיים x כזה, כלומר הקצוות הולכים לקצוות.

כעת $f([a,b]\setminus\{a,b\})=[c,d]\setminus\{c,d\}$ ולכן $f((a,b))=(c,d)$ ולכן f פתוחה.

אזי f הומיאומורפיזם.

**תרגיל דומה:** תהי $f:X\to Y$ רציפה והפיכה כאשר X קומפקטי ו-Y האוסדורף.

אזי f הומיאומורפיזם.

**טענה:** תהי $X$ קב' ו- $B\subseteq P(X)$. $B$ בסיס לטופולוגיה על $X$ $\Longleftrightarrow$

1. $\bigcup_{A\in B} A = X$

2. אם $A_1,A_2\in B$ אזי $A_1\cap A_2=\bigcup_{A\in C}A$ עבור $C\subseteq B$ כלשהו.

(הטופולוגיה המושרית ע"י איחודים של קב' מ-B).

**הגדרה:** מ"ט נקרא ממימד אפס אם יש לו בסיס של קבוצות סגוחות.

**תרגיל:** א. הוכח ש- $B=\{a+5^n\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$ בסיס לטופולוגיה $\tau$ על $\mathbb{Z}$.

**פתרון:** נראה שהתכונות הדרושות מתקיימות: 1. $\mathbb{Z}=\bigcup_{a=0}^{4}(a+5\mathbb{Z})$ ולכן $\bigcup B=X$.

2. נתבונן בחיתוך של 2 קב' מ-B: $(a+5^n\mathbb{Z})\cap(b+5^m\mathbb{Z})=?$

$$(a+5^n\mathbb{Z})\cap(b+5^m\mathbb{Z})=\begin{cases}\emptyset & a\not\equiv b \mod 5^m \text{ :} m\le n \text{ בה"כ} \\ a+5^n\mathbb{Z} & \text{אחרת}\end{cases}$$

בכל אופן, החיתוך הוא (איחוד של) קבוצה מהבסיס.

לכן התכונות מתקיימות, B הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי $\tau$ על $\mathbb{Z}$.

ב. נראה ש- $(\mathbb{Z},\tau)$ ממימד אפס.

**פתרון:** המרחב שלנו שקול עם המטריקה $d_5$ (ה-5 אדית).

אפשר לבדוק שלכן, $a+5^{n+1}\mathbb{Z}=B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})$.

ראינו ש- $B_{d_5}(a,\frac{1}{5^n})=B_{d_5}[a,\frac{1}{5^{n+1}}]$

לכן הקב' ב-B הן סגורות ופתוחות

## מרחבי מכפלה

יהיו $X,Y$ מ"ט. נתבונן בקב' $X\times Y$.

נשים בסיס למרחב טופולוגי (על $X\times Y$) - $B=\{O_1\times O_2 \mid O_1\in\tau_X, O_2\in\tau_Y\}$ כלומר מכפלת פתוחים.
הטופולוגיה המתאימה נקראת $\boxed{\text{טופולוגיית המכפלה}}$.

**טענה:** יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i=1}^{n}$ מ"ט ויהיו $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ בסיסים מתאימים.
אזי - $B=\{O_1\times\dots\times O_n \mid O_i\in B_i, 1\le i\le n\}$ הוא בסיס לטופולוגית המכפלה על $X=X_1\times\dots\times X_n$.

**הוכחה:** ראשית, הקב' $C=\{O_1\times\dots\times O_n \mid O_i\in\tau_i, 1\le i\le n\}$ הוא בסיס על $X$.
שנית, ראינו שאם $D_1$ בסיס של $(Y,\tau)$ ו-$D_2\subseteq D_1$,
אז $D_2$ בסיס של $\tau$ $\Leftrightarrow$ לכל $U\in D_1$ ולכל $x\in U$ קיימת $V\in D_2$ כך ש-$x\in V\subseteq U$.
במקרה שלנו, $C$ בסיס ו-$B\subseteq C$.
תהי $O=O_1\times\dots\times O_n\in C$ ו-$x=(x_1,\dots,x_n)\in O$. $x_i\in O_i\in\tau_i$ ו-$B_i$ בסיס ל-$\tau_i$,
לכן קיימת $V_i\in B_i$ כך ש-$x_i\in V_i\subseteq O_i$ לכל $1\le i\le n$.
מהגדרת $B$, $V=V_1\times\dots\times V_n\in B$ כך ש-$x\in V\subseteq O$ כנדרש. לכן $B$ בסיס.

**תרגיל:** יהיו $X,Y$ מ"ט, $Y$ האוסדורף. תהיינה $f,g:X\to Y$ רציפות.
א. הוכח שהאלכסון $\Delta=\{(y,y)\mid y\in Y\}$ סגור ב-$Y\times Y$.
**פתרון:** נניח שלא, אז $cl(\Delta)\neq\Delta$. אבל $\Delta\subseteq cl(\Delta)$, לכן קיים $(a,b)\in cl(\Delta)$ כך ש-$(a,b)\notin\Delta$.
$(a,b)\notin\Delta$ לכן $a\neq b$. מכיוון ש-$Y$ האוסדורף, קיימות $U,V\subseteq Y$ פתוחות זרות
כך ש-$a\in U, b\in V$. $U\times V$ פתוחה (בסיס) ו- $(a,b)\in U\times V$.
כעת, $(U\times V)\cap\Delta=\emptyset$, אחרת קיים $(y,y)\in U\times V$ בסתירה לכך ש-$U,V$ זרות.
אבל $(a,b)\in U\times V$ ו-$(a,b)\in cl(\Delta)$, בסתירה לאפיון הנקודות של $cl$.
(תזכורת עם $b$ קב' פתוחה בסיסית לא ריק: $p\in cl(\Delta)\Leftrightarrow$ לכל סביבה בסיסית $W$ של $p$ $W\cap\Delta\neq\emptyset$)
לכן $cl(\Delta)=\Delta$, אז $\Delta$ קב' סגורה.

ב. הוכח שהקב' $A=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ סגורה ב-$X$.
**פתרון:** נשתמש בסעיף א'. נגדיר פונק' $h:X\to Y\times Y$ ע"י $h(x)=(f(x),g(x))$.
$h$ רציפה (רציפה רכיב-רכיב = ההרכבה עם כל אחד מההטלות היא רציפה).
$\Delta\subseteq Y\times Y$ סגורה לכן גם $h^{-1}(\Delta)$ סגורה. מתקיים - $h^{-1}(\Delta)=A$ (מיידי).

<u>המשך התרגול:</u>

2. יהי $B\subseteq X$ צפופה ונניח ש- $\forall_{b\in B}: f(b)=g(b)$. הוכח $\forall_{x\in X}: f(x)=g(x)$.

(כלומר אם פונק' רציפות מסכימות על קב' צפופה, אז הן זהות).

<u>פתרון:</u> נשתמש בסעיף ב': נשים לב ש- $B$ מוכלת ב- $A$. ולכן $cl(B)\subseteq cl(A)$

$cl(B)=X$ כי $B$ צפופה ו- $cl(A)=A$ כי $A$ סגורה.

לכן בסה"כ נקבל - $X\subseteq A$, ולכן $X=A$ ולכן - $\forall_{x\in X}: f(x)=g(x)$

<u>תרגיל:</u> יהי $X$ מ"ט ויהי $\{y\}$ נקודון כלשהו. הוכיחו ש- $X\times\{y\}\cong X$.

<u>פתרון:</u> נתבונן בפונק' ההטלה $P_1: X\times\{y\}\to X$ : $P_1(x,y)=x$ , $P_1$ רציפה

וההופכית היא - $P_1^{-1}(x)=(x,y)$ והיא רציפה רכיב-רכיב (הראשון הזהות והשני-קבועה)

בסה"כ $P_1$ הומיאומורפיזם.

<u>תרגיל:</u> 1. יהיו $X,Y$ מ"ט ותהיינה $F\subseteq X,\ G\subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי $F\times G$ סגורה ב- $X\times Y$.

<u>פתרון:</u> נשים לב- $(F\times G)^c=((X\setminus F)\times Y)\cup(X\times(Y\setminus G))$

$X, X\setminus F\subseteq X$ פתוחות, $Y, Y\setminus G\subseteq Y$ פתוחות, ולכן גם- $(X\times(Y\setminus G))$, $((X\setminus F)\times Y)$

פתוחות ב- $X\times Y$ ולכן גם האיחוד שלהן הוא קב' פתוחה,

ולכן גם $(F\times G)^c$ פתוחה ומכאן, $F\times G$ סגורה.

2. יהיו $X,Y$ מ"ט $A\subseteq X, B\subseteq Y$. הוכיחו ש- $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)$

<u>פתרון:</u> $(\subseteq)$ $A\subseteq cl(A)$, $B\subseteq cl(B)$ ולכן - $A\times B\subseteq cl(A)\times cl(B)$.

$cl(A), cl(B)$ סגורות ב- $X,Y$ ולפי הסעיף הקודם, $cl(A)\times cl(B)$

סגורה ב- $X\times Y$. לכן גם- $cl(A\times B)\subseteq cl(A)\times cl(B)$

$(\supseteq)$ תהי $(a,b)\in cl(A)\times cl(B)$. כלומר $b\in cl(B)$, $a\in cl(A)$.

לכן לכל $U\subseteq X, V\subseteq Y$ פתוחות כך ש- $a\in U, b\in V$, $U\cap A, V\cap B\neq\phi$.

כל סביבה בסיסית של $(a,b)$ היא מהצורה $U\times V$, כאשר $U$ סביבה של $a$ ו- $V$ של $b$.

ולכן ש- $(U\times V)\cap(A\times B)\neq\phi$ ולכן $(a,b)\in cl(A\times B)$ ובסה"כ - $cl(A)\times cl(B)\subseteq cl(A\times B)$.

3. הוכח שאם $X,Y$ ספרביליים, אז גם $X\times Y$ ספרבילי.

<u>פתרון:</u> מרחב הוא ספרבילי אם יש בו קב' צפופה בת מניה. $X,Y$ ספרביליים אז קיימות $A\subseteq X, B\subseteq Y$

צפופות בנות מניה. מהסעיף הקודם, $cl(A\times B)=cl(A)\times cl(B)=X\times Y$ כלומר $A\times B$ צפופה ב- $X\times Y$.

כמו כן $A\times B$ בת מניה כי $A,B$ בנות מניה. ולכן $X\times Y$ ספרבילי.

תרגיל: יהיו $(X_1,\tau_1),\dots,(X_n,\tau_n)$ מ"ט מטריזביליים.

אזי $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ מטריזבילי (עם טופולוגיית המכפלה).

פתרון: נשתמש בטענה הבאה: $\tau_\Pi$ (טופולוגיית המכפלה) היא הטופולוגיה החלשה ביותר בה ההטלות רציפות.

נמצא מטריקה שמשרה את $\tau_\Pi$.

$X_i$ מטריזביליים, לכן קיימת מטריקה $d_i$ המשרה את $\tau_i$ לכל $1\le i\le n$.

נגדיר מטריקה על $X$: $d_{max}(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i)\mid 1\le i\le n\}$.

נסמן את הטופולוגיה המושרית ע"י $d_{max}$ כ-$\tau_{max}$. נראה שההטלות $p_i:(X,d_{max})\to(X_i,d_i)$ רציפות.

תהי $x\in X$. יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז אם $d_{max}(x,y)<\delta$ אזי:

$d_i(p_i(x),p_i(y))=d_i(x_i,y_i)\le d_{max}(x,y)<\delta=\varepsilon$ ולכן רציפות.

מהטענה שהשתמשנו בהתחלה, $\tau_\Pi\subseteq\tau_{max}$. כעת נראה - $B_{d_{max}}(x,\varepsilon)=B_{d_1}(x_1,\varepsilon)\times\dots\times B_{d_n}(x_n,\varepsilon)$

אם כן - $y\in B_{d_{max}}(x,\varepsilon)\iff d_{max}(x,y)<\varepsilon\iff d_i(x_i,y_i)<\varepsilon$

$\iff y_i\in B_{d_i}(x_i,\varepsilon)\iff y\in\prod_{i=1}^{n}B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$.

כעת, $\underset{\text{בסיס ל-}\tau_{max}}{C_{max}=\{B_{d_{max}}(x,\varepsilon)\}}\subseteq\underset{\text{בסיס ל-}\tau_\Pi}{\{\prod_{i=1}^{n}B_{d_i}(x_i,\varepsilon)\}=C_\Pi}$.

אם כן, $C_{max}\subseteq C_\Pi$, $C_{max}$ מהווה בסיס ל-$\tau_\Pi$, לכן $\tau_{max}\subseteq\tau_\Pi$.

בסה"כ $\tau_\Pi=\tau_{max}$ לכן $(X,\tau_\Pi)$ מטריזבילי.

## מכפלה (אינסופית) של מרחבים טופולוגיים

(מכפלה סופית או אפילו בת מנייה ניתנת להגדרה ע"י וקטורים סופיים או אינסופיים,
אבל מכפלה לא בת מנייה לא, נדרש כלל).

תהי $I$ קב' אינדקסים ותהי $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מ"ט.

נגדיר את $\boxed{\text{המכפלה הקרטזית}}$ באופן הבא: $\prod_{i\in I} X_i=\{f:I\to\bigcup_{i\in I}X_i \mid f(i)\in X_i\}$.

נתבונן במקרה הסופי: $X_1=\{3,4\}$, $X_2=\{5,6\}$ אז $X_1\times X_2=\{(3,5),(3,6),(4,5),(4,6)\}$.

מסתכלים על הפונ' $f:\underbrace{\{1,2\}}_{I}\to\underbrace{\{3,4,5,6\}}_{\bigcup_{i\in I} X_i}$ שמקיימת $f(1)\in X_1$ וגם $f(2)\in X_2$.

כלומר $f(1)\in\{3,4\}$, $f(2)\in\{5,6\}$. אם כן יש לנו 4 פונ':

$$\underbrace{f(1)=3,\ f(2)=5}_{(3,5)},\ \underbrace{f(1)=3,\ f(2)=6}_{(3,6)},\ f(1)=4,\ f(2)=5,\ f(1)=4,\ f(2)=6$$

ונראה שכל פונ' זוג סדור לפי תמונת הפונ'.
כך ניתן להכליל את המכפלה הקרטזית הרגילה.

נגדיר בסיס לטופולוגית המכפלה $\tau_\Pi$ על $\prod_{i\in I}X_i$ באופן הבא: $B=\{\prod_{i\in I}A_i \mid A_i=X_i$ לכל מס' סופי של אינדקסים$\}$

אפשר גם לומר שקיימת $F\subseteq I$ סופית, כך שלכל $i\in I\setminus F$, $A_i=X_i$. בכל מקרה $A_i\subseteq X_i$!

<u>הערה</u>: נשים לב שלא כל התכונות שנשמרות במכפלה רגילה נשמרות במכפלה אינסופית,
למשל - מכפלה סופית של $\tau_d$ היא $\tau_d$, וגם במכפלה כזו.
אם מכפלה סופית של מטריקות היא מטריקה, לעומת מכפלה אינסופית זה לא נכון.

אפשר להגדיר את פונ' ההטלה: $p_j:\prod_{i\in I}X_i\to X_j$ ע"י $p_j(f)=f(j)$.

<u>משפט</u>: בטופולוגיה $\tau_\Pi$, ההטלות הן רציפות ופתוחות.

<u>למה</u>: יהיו $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in I}$ מ"ט. תהי $\tau$ טופולוגיה על $\prod_{i\in I}X_i$ (לאו דווקא $\tau_\Pi$).
$p_j:(\prod X_i,\tau)\to(X_j,\tau_j)$ רציפה לכל $j\in I$, אם"ם $\tau_\Pi\subseteq\tau$.

כלומר, $\tau_\Pi$ היא הטופולוגיה המינימלית על $\prod_{i\in I}X_i$ שבה ההטלות רציפות.

<u>הוכחה</u>: רוצים להוכיח $\tau_\Pi\subseteq\tau$. מספיק להראות שעבור $A\in B$ (בסיס ל-$\tau_\Pi$) מתקיים $A\in\tau$.

אם כן, תהי $A\in B$. נסמן $A=\prod_{i\in I}A_i$.

מקרה 1 - $A_i=X_i$ לכל $i$. כלומר $A=\prod_{i\in I}X_i$ ומהגדרת טופולוגיה, $A\in\tau$.

מקרה 2 - קיימת קב' סופית של אינדקסים $F\subseteq I$ כך שלכל $i\in I\setminus F$, $A_i=X_i$. נסמן $F=\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$.

ידוע שההטלות $p_j$ רציפות. נתבונן בהטלות המתאימות לאינדקסים של $F$: $p_{i_k}:(\prod X_i,\tau)\to(X_{i_k},\tau_{i_k})$.

## המשך הדוגמה:

המשך עובדה ב- תמונה הפוכה של קב' פתוחה היא קב' פתוחה:

אם כן, $\bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1}(A_{i_k})$. כל האינדקסים שהם לא $i_k$ למשל, יש את כל המרחב.

$P_{i_k}^{-1}(A_{i_k})\in\mathcal{T}$. כי עבור האינדקסים לשאר $i_k$ יש את כל המרחב, והאינדקס $i_k$ יש את $A_{i_k}$.

כל אחד מה-$i_k$ יש את ה-$A_{i_k}$ המתאימה, ולכן - $\bigcap_{k=1}^{n} P_{i_k}^{-1}(A_{i_k})=A$

זה חיתוך סופי של קב' פתוחות ולכן זו היא קב' פתוחה.

כמבוקש $A\in\mathcal{T}$ ולכן $\mathcal{T}_\Pi\subseteq\mathcal{T}$.

<u>הגדרה:</u> תהי $X$ קבוצה. הפונק' $\gamma:[a,b]\to X$ נקראת $\boxed{\text{מסילה}}$ מ-$c\in X$ ל-$d\in X$ אם: $\gamma(b)=d$ , $\gamma(a)=c$.

אם $(X,\mathcal{T})$ מ"ט, פונק' $\gamma:[0,1]\to X$ רציפה נקראת $\boxed{\text{מסילה}}$ מ-$a\in X$ ל-$b\in X$ אם: $\gamma(0)=a,\ \gamma(1)=b$.

<u>דוגמה:</u> כדורים פתוחים וסגורים הם "קשירים מסילתית" ← אפשר לחבר כל נק' עם כל נק' ע"י מסילה.

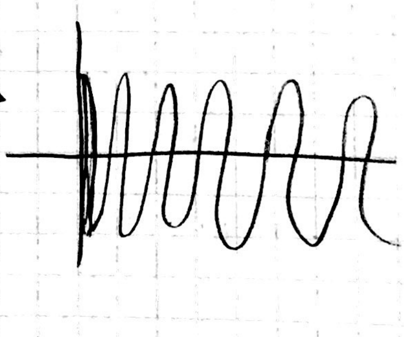
<u>הגדרה:</u> מרחב טופולוגי $(X,\mathcal{T})$ נקרא $\boxed{\text{קשיר מסילתית}}$, אם לכל $a,b\in X$ קיימת מסילה $\gamma:[0,1]\to X$ כך ש- $\gamma(0)=a,\ \gamma(1)=b$.

<u>משפט:</u> קב' קשירה מסילתית היא קב' קשירה.

הכיוון ההפוך לא דווקא נכון - קיימות קב' קשירות שאינן קשירות מסילתית.

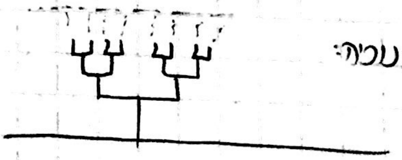
<u>דוגמה:</u> א. עקומת הסינוס של הטופולוגים: ב-$\mathbb{R}^2$ נתבונן בקב' - $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0\}\cup\{(x,\sin(\frac{1}{x})) \mid x>0\}$

האיחוד של ציר ה-y והגרף (בצד החיובי) של $\sin\frac{1}{x}$



# קשיר אך לא קשיר מסילתית
(אין מסילה שמגיעה לכל חלק' על ציר ה-X
אך כדור כן יכול לבלוע נק' רבות)

ב. המנורה:



קשיר אך לא קשיר מסילתית כי לא ניתן להגיע לנק' בסוף ע"י מסילה

תרגיל: תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ בת-מנייה. הראו ש- $\mathbb{R}^2\setminus A$ קשירה מסילתית.

פתרון: בין 2 נקודות $x,y\in\mathbb{R}^2$ קיים קו ישר. ב-$X$ עוברים א ישרים וכך גם ב-$y$

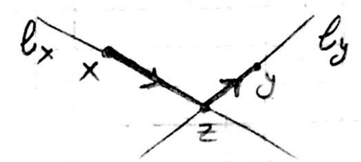
(לכל שיפוע $m\in\mathbb{R}$ מתאים ישר ויש גם ישר שמאונך לציר ה-$x$).

מכיוון ש- $|A|\leq\aleph_0$, אפשר למצוא ישר $l_x$ שעובר ב-$x$ ומוכל ב- $\mathbb{R}^2\setminus A$,

כך גם ישר $l_y$ עבור $y$.

אפשר לבחור $l_x,l_y$ כך שלא יקבילו, כלומר יחתכו בנק' $z\in\mathbb{R}^2$.

המסילה בין $x$ ל-$y$ תהיה הקטע בין $x$ ל-$z$ על $l_x$ אז הקטע בין $z$ ל-$y$ על $l_y$:

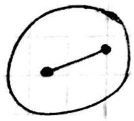



הגדרה: תהי $C\subseteq X$ כאשר $X$ מרחב וקטורי. נאמר ש-$C$ $\boxed{\text{קמורה}}$ אם לכל $x,y\in C$

ולכל $t\in[0,1]$, מתקיים: $(1-t)x+ty\in C$.

אינטואיטיבית, בין כל 2 נק' אפשר למתוח קו ישר שנמצא כולו בקב'.

דוגמה: כדורים פתוחים וסגורים הם קב' קמורות:



תרגיל: יהי $X$ מ"ו ותהי $C\subseteq X$ קמורה. הראו ש-$C$ קשירה מסילתית.

פתרון: המסילה המתאימה בין $x,y\in C$ היא הקו הישר: $(1-t)x+ty\in C$ (כי $C$ קמורה)

* פורמלית, יש להראות ש- $\gamma:[0,1]\to C$, $\gamma(t)=(1-t)x+ty$ אכן הפונק' רציפה

משפט: אם $A,B\subseteq X$ קשירים מסילתית ו- $A\cap B\neq\emptyset$, אז- $A\cup B$ קשיר מסילתית.

טענה: לכל $n>1$, $\mathbb{R}\ncong\mathbb{R}^n$.

הסבר: אפשר לראות זאת באמצעות קשירות וקשירות מסילתית.

אם היה קיים $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ הומיאומורפיזם אז גם

$f|_{\mathbb{R}\setminus\{a\}}:\mathbb{R}\setminus\{a\}\longrightarrow\mathbb{R}^n\setminus\{f(a)\}$ הומיאומורפיזם

אבל $\mathbb{R}\setminus\{a\}=(-\infty,a)\cup(a,\infty)$ לא קשיר ולא קשיר מסילתית,

$\mathbb{R}^n\setminus\{f(a)\}$ קשיר מסילתית. לכן, לא קיים הומ' כזה.

טענה: לכל $n$ $S^n\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}^n$

טל־אור ♡

אני רוצה להודות להורי (ומעיין) שהביאוני עד הלום.
לצבית שמגיעה לכתוב במחברת שלכם!
ולהכי הכי, עזה אלון חוח
של איך לכתוב במחברת שלכם.
אבל היה כיפה
-ל. עלתה

<u>תרגיל:</u> הראו שלכל $n$, $S^n$ קשיר מסילתית.

<u>פתרון:</u> נתבונן בשתי נקודות שונות $a,b\in S^n$.

$S^n\setminus\{a\}\cong\mathbb{R}^n$ וגם $S^n\setminus\{b\}\cong\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ קשיר מסילתית ולכן $S^n\setminus\{a\}$, $S^n\setminus\{b\}$ קשירים מסילתית.

בוודאי ש- $S^n\setminus\{a\}\cap S^n\setminus\{b\}\neq\emptyset$, ולכן לפי המשפט

$S^n\setminus\{a\}\cup S^n\setminus\{b\}=S^n$ קשיר מסילתית.

<u>טענה:</u> אם $m\neq n$ מתקיים: $S^n\ncong S^m$, $\mathbb{R}^n\ncong\mathbb{R}^m$

<u>הגדרה:</u> יהי $X$ מ"ט

<u>א.</u> קבוצה $C\subseteq X$ נקראת מרכיב קשירות (רכיב קשירות)

אם $C$ קשירה, ולכל $C\subseteq D$ קשירה, $D=C$. ($C$ קשירה ~~מסילתית~~ מקסימלית)

<u>ב.</u> קבוצה $C\subseteq X$ נקראת רכיב קשירות מסילתית אם $C$ קשירה

מסילתית, ולכל $C\subseteq D$ קשירה מסילתית, $D=C$ ($C$ קשירה מסילתית מקסימלית)

<u>טענה</u> יהי $f:X\to Y$ רכיב קשירות, לכן $C$ קשיר.

$f$ הומיאו ולכן רציפה ולכן גם $f(C)\subseteq Y$ קשיר.

נניח בשלילה שקיים $f(C)\subsetneq D\subseteq Y$ קשיר.

$f$ הומיאו ולכן $f^{-1}$ רציפה, ולכן $f^{-1}(f(C))\subsetneq f^{-1}(D)\subseteq X$ קשיר. כלומר

$C\subsetneq f^{-1}(D)\subseteq X$ בסתירה לכך ש-$C$ רכיב קשירות.

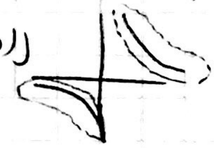
לכן $f(C)$ רכיב קשירות.

למה הבא...

<u>טענה:</u> יהי $f:X\to Y$ הומאומורפיזם. אזי $f$ מעביר רכיב קשירות (מסילתי) לרכיב קשירות (מסילתי)

<u>הוכחה:</u> יהי $C\subseteq X$ רכיב קשירות. לכן $C$ קשיר. $f$ הומאומורפיזם לכן רציפה,
אז גם $f(C)\subseteq Y$ קשיר. נניח בשלילה שקיים $f(C)\subset D\subseteq Y$ קשיר.
$f$ הומאו' לכן $f^{-1}$ רציפה, אז $f^{-1}(f(C))\subseteq f^{-1}(D)\subseteq X$ קשיר,
כלומר $C\subset f^{-1}(D)\subseteq X$ קשיר, בסתירה לכך ש-$C$ רכיב קשירות, לכן $f(C)$ רכיב קשירות.

<u>טענה:</u> יהי $(X,\tau)$ מ"ט, שבו לכל $x$ יש סביבה קשירה מסילתית.
(מרחב כזה נקרא $\boxed{\text{מרחב קשיר מקומית}}$).
אזי כל רכיב קשירות מסילתי הוא קב' פתוחה.
אם כך, רכיבי הקשירות המסילתית שווים לרכיבי הקשירות, והם גם קב' סגורות.
<u>מסקנה:</u> קב' $A\subseteq X$ פתוחה היא קשירה $\Leftrightarrow$ קשירה מסילתית.

<u>תרגיל:</u> נתבונן בגרף של $f(x)=\frac{1}{x}$, $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$.
האם הגרף הוא מרחב קשיר/ קשיר מסילתית? מצאו את הרכיבים.
<u>פתרון:</u> הגרף נראה כך -  נראה שהמרחב לא קשיר (מפריד רצף הקודקוד).

$f$ רציפה. ראינו שאם $A\subseteq\mathbb{R}$ ו- $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה, אז $Grf\cong A$ (עם הטלה).
אצלנו $Grf\cong\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, ולכן $Grf$ לא קשיר.
$f((0,\infty)), f((-\infty,0))$ הם רכיבי הקשירות והקשירות המסילתית.

# קומפקטיות

## הגדרה:

א. יהי X מ"ט ותהי $A\subseteq X$.

1. אוסף $\{O_i\}_{i\in I}$ של קב' $O_i\subseteq A$ נקרא $\boxed{\text{כסוי פתוח של A}}$, אם $O_i\subseteq A$ פתוחה ב-A ו- $A=\bigcup_{i\in I} O_i$.
2. אוסף $\{O_i\}_{i\in I}$ של קב' $O_i\subseteq X$ נקרא $\boxed{\text{כסוי פתוח של A ב-X}}$, אם $O_i\subseteq X$ פתוחה ב-X ו- $A\subseteq\bigcup_{i\in I} O_i$.

ב. אם $\{O_i\}_{i\in I}$ כסוי פתוח של A ו- $J\subseteq I$ מקיים: $\{O_j\}_{j\in J}$ גם כסוי פתוח של A,
אז $\{O_j\}_{j\in J}$ נקרא $\boxed{\text{תת כסוי}}$

ג. $A\subseteq X$ נקראת $\boxed{\text{קומפקטית}}$ אם לכל כסוי פתוח (לפי הגדרה 1) יש תת כסוי סופי.

## משפטים:

1. $A\subseteq X$ קומפקטית $\iff$ לכל כסוי פתוח של A ב-X (לפי הגדרה 2) יש תת כסוי סופי.
2. יהי X מ"ט האוסדורף. אם $A\subseteq X$ קומפקטית, אז A סגורה ב-X.
3. יהי X מ"ט קומפקטי. אם $A\subseteq X$ סגורה, אז A קומפקטית.
4. <u>היינה בורל</u>: ב-$\mathbb{R}^n$, קב' K היא קומפקטית $\iff$ סגורה וחסומה.
5. במרחב מטרי, אם K קומפקטית אז סגורה וחסומה.

<u>תרגיל</u>: מצא מ"ט X ותת קב' $A\subseteq X$ שהיא קומפקטית אבל לא סגורה.

<u>פתרונות</u>: 1. נתבונן ב-$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית $\tau_{triv}=\{\phi,\mathbb{R}\}$ (זה אומר כי רק $\mathbb{R},\phi$ סגורות)

נתבונן ב-$A\subseteq\mathbb{R}$. הכסוי הפתוח היחיד של A הוא $\{\mathbb{R}\}$, ואם כן קיים לו תת כסוי סופי (הכסוי עצמו כבר סופי). לכן A קומפקטית.

אם $\phi\subset A\subset\mathbb{R}$, אז $\phi\subset A^c\subset\mathbb{R}$ ולכן $A^c$ אינה פתוחה, אז A אינה סגורה כנדרש.

2. נתבונן בקב' אינסופית X עם הטופולוגיה הקו-סופית - $\tau_{cof}$.

תהי $A\subseteq X$ לא ריקה. יהי $\{O_i\}_{i\in I}$ כסוי פתוח של A ב-X, אז $A\subseteq\bigcup_{i\in I}O_i$.

יהי $x\in A$. לכן קיים i כך ש- $x\in O_i$. $O_i$ פתוחה (ולא ריקה) לכן מהגדרת $\tau_{cof}$,
$X\setminus O_i$ סופית. כמו כן- $A\setminus O_i\subseteq X\setminus O_i$ לכן גם $A\setminus O_i$ סופית.

נסמן $A\setminus O_i=\{x_1,\dots,x_n\}$. לכל $1\le j\le n$, $x_j\in A$, לכן קיים $O_j$ מהכסוי $\{O_i\}_{i\in I}$ כך ש- $x_j\in O_j$.

לכן $A\subseteq\left(\bigcup_{j=1}^{n} O_j\right)\cup O_i$ וזה תת כסוי סופי לכן קומפקטית. למשל $X\setminus\{x\}$ לכל $x\in X$ אינה X ואינסופית לכן לא סגורה.

3. מרחב שרפינסקי: $X=\{a,b\}$, $\tau=\{\phi,\{a\},X\}$. נתבונן ב-$\{a\}$. הואיל ו-$\{b\}$ לא פתוחה אז $\{a\}$ לא סגורה.
מס' הקב' הפתוחות הוא סופי לכן כל קב' היא קומפקטית.

**טענה:** יהי $X$ מ"ט האוסדורף ונניח $\{A_i\}_{i\in I}$ אוסף של תתי מרחבים קומפקטים.
אז $\bigcap_{i\in I} A_i$ תת מרחב קומפקטי.

**תרגיל:** מצא דוגמא למ"ט $X$ ואוסף תתי מרחבים קומפקטים $\{A_i\}_{i\in I}$, כך ש-$\bigcap_{i\in I} A_i$ אינו קומפקטי.

**פתרון:** ננסה דוגמא שבה אפילו חיתוך של שני תתי מרחבים קומפקטים אינו תת מרחב קומפקטי.
(התקווה: מבנה לא האוסדורף כי שם כל קבוצה היא קומפקטית).

נבחר בקב' $\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}\}\cup\{i\}$ את הטופולוגיה $\tau=\{\mathbb{Z},\emptyset,\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2},i\},\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}\},\mathbb{Z}\cup\{i\},\{\{-n,\dots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}\}$ לכל
נשים לב שזו אכן טופולוגיה.

נשים לב ש-$\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}\}$, $\mathbb{Z}\cup\{i\}$, יש מס' סופי של קב' פתוחות שמכסות אותן,
ולכן שתיהן קב' קומפקטיות. מצד שני, $\mathbb{Z}=(\mathbb{Z}\cup\{i\})\cap(\mathbb{Z}\cup\{\frac{1}{2}\})$

נקבל ש- $\mathbb{Z}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-n,-n+1,\dots,n-1,n\}$, לכיסוי פתוח זה אין תת-כיסוי סופי ולכן $\mathbb{Z}$ לא קומפקטי.

**משפט:** תהי $f:X\to Y$ רציפה, כאשר $X$ קומפקטי ו-$Y$ האוסדורף. אזי, $f$ סגורה.

**מסקנה:** תהי $f:X\to Y$ רציפה והפיכה כאשר $X$ קומפקטי ו-$Y$ האוסדורף, אזי $f$ הומיאומורפיזם.

**תרגיל:** יהי $(X,\tau)$ מ"ט קומפקטי והאוסדורף, הוכח:
1. אם $\tau'\subseteq\tau$ ו-$(X,\tau')$ קומפקטי, אז $\tau'=\tau$.
2. אם $\tau\subseteq\tau''$ ו-$(X,\tau'')$ האוסדורף, אז $\tau''=\tau$.

**הערה:** קומפקטיות דורש שלכל כיסוי פתוח... אז ככל שיש יותר קב' פתוחות, יותר קשה להיות קומפקטי.
האוסדורף דורש שלכל 2 נק' יימצאו קב' פתוחות שמפרידות אותן, לכן ככל שיש פחות פתוחות, יותר קשה להיות האוסדורף.
התרגיל הזה רומז מדוע שמרחב קומפקטי והאוסדורף זה איזשהו מצב שיווי משקל מאוד עדין -
אם נוסיף קב' לטופולוגיה, נהרוס את הקומפקטיות ואם נוריד, נהרוס את האוסדורף.

**פתרון:** 1. נתבונן בפונק' $Id:(X,\tau)\to(X,\tau')$. זו הפיכה כי $Id:(X,\tau')\to(X,\tau)$ היא ההופכית.
זו רציפה כי $\tau'\subseteq\tau$ אז עבור $X\supseteq A\in\tau'$, $A=Id^{-1}(A)$ ו-$Id^{-1}(A)\in\tau$, לכן תמונה
הפוכה של קב' פתוחה היא קב' פתוחה.
$Id$ רציפה והפיכה מקומפקטי $(X,\tau)$ להאוסדורף $(X,\tau')$ ולכן לפי המסקנה, $Id$ הומיאו', אז $\tau'=\tau$.
2. באופן דומה, נתבונן בפונק' $f:(X,\tau)\to(X,\tau'')$.

**הערה:** שיווי המשקל בין האוסדורף לקומפקטיות לא אומר מקסימום! אם $\tau'$ לא מוכל ולא מכיל את $\tau$,
שיתכן שהוא לדוגמה האוסדורף קומפקטי.

תרגיל: הראה שבישר של סורגנפריי, הקטע $[0,1]$ אינו קומפקטי.

פתרון: נתבונן בכיסוי הפתוח הבא של $[0,1]$: $\{1\}\cup\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,1-\frac{1}{n})\right)=[0,1]$.

זה כיסוי פתוח (של $[0,1]$ ב-$[0,1]$), כי קב' פתוחות ב-$[0,1]$ הן חיתוך של $[0,1]$ עם קב' פתוחות ב-$\mathbb{R}$. אבל- $[0,1-\frac{1}{n})=[0,1]\cap[0,1-\frac{1}{n})$, $\{1\}=[0,1]\cap[1,2)$.

אם כן, זה כיסוי פתוח וקל לראות שאין לו תת כיסוי סופי. לכן $[0,1]$ לא קומפ' ב-$(\mathbb{R},T)$.

הערה: $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הסטנדרטית הוא קומפקטי (לפי היינה בורל, סגור וחסום) והאוקלידית (מטרי).

מכיוון ש-$T$ מעודנת ממש את הטופולוגיה הסטנדרטית על $[0,1]$, מהתרגיל הקודם, $([0,1],T)$ לא קומפ'.

על דרך הכלל יותר קשה למצוא כיסוי פתוח שאין לו כיסוי סופי.

הערה: נאמר ש- $g:X\to Y$ $\boxed{\text{שיכון}}$, אם $g:X\to g(X)$ הומאומורפיזם. (שיכון זה להניח קב' כמו שהיא בקב' יותר גדולה)

תרגיל ממבחן: יהי $M$ מרחב מטרי, ונניח $a\in M$ נק' הצטברות של $M$.

נסמן ב-$A$ את תת המרחב הבא של $\mathbb{R}$: $A=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$.

הראה שקיים שיכון $g:A\to M$.

פתרון: מכיוון ש-$a\in M$ נק' הצטברות, קיימת סדרה $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq M$ של איברים שונים כך ש-$a_n\to a$.

נגדיר $g:A\to M$ ע"י: $g(x)=\begin{cases}a_n & x=\frac{1}{n}\\ a & x=0\end{cases}$. קל לראות ש-$g$ חח"ע.

נבדוק ש-$g$ אכן רציפה. נרצה רציפות לכל $x\in A$. נחלק למקרים עבור $x\in A$.

רוצים להראות שלכל סביבה פתוחה $V$ של $g(x)$, קיימת סביבה פתוחה $U$ של $x$, כך ש-$g(U)\subseteq V$.

$\frac{1}{n_0+1}\quad\frac{1}{n_0}\quad\frac{1}{n_0-1}$

אם $x=\frac{1}{n_0}$, נסמן $r=\frac{1}{2}\min\{|\frac{1}{n_0+1}-\frac{1}{n_0}|,|\frac{1}{n_0}-\frac{1}{n_0-1}|\}$ (כלומר הרדיוס הקטן אין עוד איברים מהסדרה $\frac{1}{n}$).

כלומר $B(\frac{1}{n_0},r)=\{\frac{1}{n_0}\}$. אם כן, $\{\frac{1}{n_0}\}$ סביבה פתוחה של $\frac{1}{n_0}$ ולכל סביבה פתוחה $V$ של $g(\frac{1}{n_0})$,

מתקיים ש- $g(\{\frac{1}{n_0}\})=g(\frac{1}{n_0})\subseteq V$ כנדרש לרציפות ב-$x$.

אם $x=0$, $\{0\}$ אינו קב' פתוחה ב-$A$ (לא אפשר להפריד אותו ע"י כדור משאר האיברים).

מכיוון ש- $a_n\to a=g(0)$, מהגדרת התכנסות במרחב מטרי, לכל $n_0\in\mathbb{N}$ קיים $M$,

כך שלכל $n>M$, $d(a_n,a)<\frac{1}{n_0}$. כלומר $d(g(\frac{1}{n}),g(0))<\frac{1}{n_0}$. אז הקב' $A\cap(-\frac{1}{M},\frac{1}{M})$ היא סביבה

פתוחה של $0$ (חיתוך של תת המרחב $A$ עם קב' פתוחה במרחב), ונקבל שקל לב הכלה לתוך

הסביבה של $a$. לכן, $g$ רציפה לכל $x\in A$ ולכן רציפה. [אפשר היה להראות רציפות גם דרך היינה - רציפות לפי סדרות]

כעת, $A\subseteq\mathbb{R}$, קומפ' לפי היינה בורל - סגורה (מכילה את $0$ נק' הגבול שלה) וחסומה.

$M$ מטרי ולכן האוסדורף. אז $g:A\to M$ סגורה כרציפה מקומפ' להאוסדורף, ולכן $g$ שיכון

**הגדרה:** מרחב נקרא $\boxed{\text{קומפקטי סדרתית}}$ אם לכל סדרה יש תת סדרה מתכנסת.

**משפט:** יהי $M$ מ"מ. התנאים הבאים שקולים: 1. $M$ קומפקטי.

2. $M$ קומפקטי סדרתית.

3. לכל $A\subseteq M$ אינסופית יש נק' הצטברות.

**דוגמא:** $\mathbb{R}$ אינו קומפקטי כי ל-$\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$ אין נק' הצטברות.

**הערה:** כל מ"מ קומפקטי הוא שלם. ההפך לא נכון - למשל $\mathbb{R}$ שלם אבל לא קומפקטי.

(שלמות היא לא תכונה טופולוגית טובה. ראינו מ"מ שלם עם טופולוגיה אחת ולא עם אחרת).

**משפט:** יהי $(M,d)$ מ"מ. תהיינה $A,C\subseteq X$ לא ריקות. נניח $C$ קומפקטית

אז קיים $c_0\in C$ כך ש- $d(C,A)=d(c_0,A)$.

(כלומר, הנק' "הכי קרובה" ל-$A$

ז"א המרחק בין A,C (שהוא אינפימום המרחקים של נקודות הקבוצות)
מתקבל במקרה שבו A קומפקטית ע"י המרחק של C מנקודה ב–A.

חזרה

תרגיל: (תשע"ג, מועד א') יהי $M$ מ"מ קומפקטי, תהי $A\subseteq M$ אינסופית. הוכיחו של-$A$ יש נק' הצטברות ב-$M$.

פתרון: נניח בשלילה שאין נק' הצטברות. אזי, $\forall x\in M$ יש $r_x$ כך ש- $B(x,r_x)\cap(A\setminus\{x\})=\emptyset$

לכן יש כיסוי פתוח $O_x=B(x,r_x)$ המקיים $\bigcup O_x=M$ (כי $x\in O_x$) אז יש לו

תת-כיסוי סופי – $O_1,\dots,O_n$. אבל, לכל $O_i$ יש אולי איבר 1 מ-$A$ (והוא $x$)

לכן ב-$\bigcup O_i=M$, יש עד $n$ איברים מ-$A$. קיבלנו ש- $|A\cap M|<\infty$ אבל $A\cap M=M$

(כי $A\subseteq M$) ולכן- $|A|<\infty$, בסתירה לכך ש- $A$ אינסופית. מש"ל

תרגיל: (תשע"ג, מועד א') יהי $X$ מ"מ קומפקטי ו-$Y$ מ"מ כלשהו. נתונה $f:X\to Y$ רציפה ועל.

הוכיחו ש-$Y$ קומפקטית.

פתרון: נניח ש-$Y$ אינה קומפקטית, אזי קיים כיסוי פתוח אינסופי $V_\alpha$ שאין לו תת-כיסוי סופי.

המקור של קב' פתוחה בפונק' רציפה-פתוח, ולכן ל-$Y$ יש קב' מקורות פתוחים $f^{-1}(V_\alpha)$

שמכסה את $X$. לכן, יש לה תת כיסוי סופי $f^{-1}(V_\beta)$ שמכסה את $X$. ניקח את $f(f^{-1}(V_\beta))$

ונראה שהוא מכסה את $Y$. $f$ על ולכן אם $f^{-1}(V_\beta)$ מכסה את $X$ אזי $V_\beta$ מכסה את $Y$. מש"ל

הוכחה לא בשלילה – $\{V_\alpha\}$ כיסוי פתוח של $Y$ $\longleftarrow$ $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ כיסוי פתוח של $X$ $\longleftarrow$ קיים תת-כיסוי

$\{f^{-1}(V_i)\}_{i=1}^{n}$ כי $X$ קומפקטי, $f$ על ולכן - $f(f^{-1}(V_i))=V_i$ אז:

$Y=f(X)=\{f(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(V_i)\}=\bigcup_{i=1}^{n}f(f^{-1}(V_i))=\bigcup_{i=1}^{n}V_i$ אז $Y$ קומפקטי. מש"ל

תרגיל: (         ) נסמן ב-$S^1$ את מעגל היחידה ונתבונן בפונקציה $f:S^1\times S^1\to\mathbb{R}$,

נניח ש-$f$ רציפה. הוכיחו שהתמונה של $f$ היא קטע סגור.

פתרון: נראה כי $S^1$ סגור ב-$\mathbb{R}^2$. נוכיח כי- $A=\mathbb{R}^2\setminus S^1$ פתוחה. לכל $x\in A$, נבחר- $r_x=\frac{d(x,S^1)}{2}$

אז- $B(x,r_x)\subset A$ ולכן $A$ פתוחה ולכן $S^1$ סגורה.

נראה כי $S^1$ חסום. ניקח כדור ברדיוס 2 סביב $(0,0)$, ולכן חסום.

לפי היינה בורל $S^1$ קומפקטי (כי סגור וחסום) ולכן $S^1\times S^1$ גם קומפקטי.

$f$ רציפה ולכן גם התמונה קומפקטית (סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}$).

$S^1$ קשיר אז- $S^1\times S^1$ קשיר ולכן התמונה גם קשירה.

התמונה קשירה וקומפקטית ולכן התמונה היא קטע סגור ב-$\mathbb{R}$.

תרגיל (תשע"ב, מועד ב')

א. יהי $X$ מ"ט ונניח ש- $A\subseteq X$, קב' קשירה וצפופה. הוכיחו ש-$X$ קשיר.

ב. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$. הראו שאם $A\neq\mathbb{R}$, צפופה ב-$\mathbb{R}$, אזי היא לא קשירה.

פתרון: א. נניח בשלילה ש-$X$ לא קשיר, לכן קיימות $Q,P\neq\emptyset$ פתוחות, כך ש $P\cap Q=\emptyset$, $P\cup Q=X$.

כיוון ש-$A$ צפופה, $P\cap A\neq\emptyset$, $Q\cap A\neq\emptyset$ ו- $(P\cap A)\cup(Q\cap A)=A$

$P\cap A$, $Q\cap A$ פתוחות ב-$A$, לפי הגדרת טופולוגיית תת-מרחב, בסתירה לקשירות של $A$.

מש"ל

ב. $A\neq\mathbb{R}$ לכן $\exists x: x\notin A$. ניקח את 2 הקטעים הפתוחים:

$I_1=(-\infty,x)$, $I_2=(x,\infty)$. $A$ צפופה לכן $\emptyset\neq A\cap I_1$, $\emptyset\neq A\cap I_2$.

ומתקיים- $A=(I_1\cap A)\cup(I_2\cap A)$. $I_1,I_2$ פתוחות בטופולוגיית תת-מרחב לכן $A$ לא קשירה.

מש"ל

תרגיל: (תשע"ג, מועד א') נזכור, הישר של זורגנפרי, $R_s$, הוא $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה כך ש- הקב' הפתוחות הן - $\bigcup_{i\in I}[a_i,b_i)$.

א. הראו שאם $A\subseteq R_s$ כך ש- $|A|>1$, אזי $A$ לא קשיר.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to R_s$. הראו ש-$f$ רציפה $(\Longleftrightarrow)$ $f$ קבועה.

פתרון: א. תהיינה $a,b$ כך ש-$a\neq b$ ו- $a,b\in A$. ניקח $x\in(a,b)$. בה"כ- $a<x<b$.

מתקיים כי- $I_1=(-\infty,x)=[x-1,x)\cup[x-2,x-1)\cup\ldots$ לכן, $(-\infty,x)$ פתוחה.

כמו כן, $I_2=[x,\infty)=[x,x+1)\cup[x+1,x+2)\cup\ldots$ לכן גם $(x,\infty)$ פתוחה.

$I_1\cap A, I_2\cap A$ פתוחות בטופולוגיה של $A$.

כמו כן, $a\in I_1\cap A$, $b\in I_2\cap A$ לכן שתיהן לא ריקות. מתקיים- $(I_1\cap A)\cap(I_2\cap A)\subseteq I_1\cap I_2=\emptyset$

לכן הן זרות. $(I_1\cap A)\cup(I_2\cap A)=\underset{\emptyset''}{(I_1\cap I_2)}\cup A=\cancel{\mathbb{R}\cap A}=A$

לכן קיבלנו פירוק של $A$ ו-$A$ אינה קשירה.

ב. $(\Longrightarrow)$ מההרצאה, כל פונק' קבועה היא רציפה.

$(\Longleftarrow)$ $A=f(\mathbb{R})$ לכן שומרת על קשירות. $\mathbb{R}$ קשיר לכן $f(\mathbb{R})$ קשירה

כלומר, מסעיף א' $f(\mathbb{R})=\{a\}$, לכן $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)\in\{a\}$ לכן- $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)=a$

וכך קיבלנו ש-$f$ קבועה. מש"ל

תרגיל: (תשע"ג, מועד א') יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מ"ט.

א. נניח שלכל $\alpha\in I$, $X_\alpha$ האוסדורף. הוכיחו ש- $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ האוסדורף.

ב. הראו שאם $I$ אינסופית ולכל $\alpha\in I$, $|X_\alpha|\geq 2$, אזי $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ אינו דיסקרטי.

פתרון: א. תהיינה $a,b\in\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$. נוכיח שקיימות $U,V\subseteq\prod X_\alpha$ פתוחות זרות, כך ש- $a\in U, b\in V$ (לפי הגדרת האוסדורף).

נחפש $U,V$ בסיסיות, קב' בסיסיות הן קב' שהן למעט מס' סופי של קורדינאטות, הקב' בקורדינאטה ה-$\alpha$ היא $X_\alpha$. $a\neq b$ ולכן קיימת $\beta\in I$ כך ש- $a_\beta\neq b_\beta$.

ההטלה

$a_\beta, b_\beta\in X_\beta$, $X_\beta$ האוסדורף ולכן קיימות $U_\beta, V_\beta$ פתוחות זרות כך ש- $a_\beta\in U_\beta$, $b_\beta\in V_\beta$. נגדיר, $U=\prod U_\alpha$, $V=\prod V_\alpha$, כאשר-

$$U_\alpha=\begin{cases} X_\alpha & \alpha\neq\beta \\ U_\beta & \alpha=\beta \end{cases} \quad , \quad V_\alpha=\begin{cases} X_\alpha & \alpha\neq\beta \\ V_\beta & \alpha=\beta \end{cases}$$

מכיוון ש- $U_\beta\cap V_\beta=\emptyset$, וגם $U\cap V=\emptyset$. כמו כן, $a\in U$ ו- $b\in V$.

בנוסף, $U,V$ פתוחות (כי למעט הקורדינטה $\beta$, לכל $\alpha\neq\beta$ יש את כל המרחב $X_\alpha$).

אם כן, מצאנו $U,V$ כדרוש. ולכן, $\prod X_\alpha$ האוסדורף.

ב. נתבונן בנקודה $\{a\}\in\prod X_\alpha$ (כלומר, בקורדינטה ה-$\alpha$ קיים נקודה מתוך $X_\alpha$).

כעת, $|X_\alpha|\geq 2$ לכל $\alpha\in I$ ולכן $\{a_\alpha\}\neq X_\alpha$, לכל $\alpha\in I$.

לכן, במספר אינסופי של קורדינטות (בכולן) אין את כל הקבוצה $X_\alpha$,

לכן $\{a\}$ אינו קב' בסיסית (או איחוד של כאלו) ולכן לא פתוח.