בוחן יתקיים ביום שני, $28/12$. חומר: עד דטרמיננטות- כולל.
ב9 בבוקר.
בשעה 9 תכנסו לזום.
הבוחן יתנהל ב$xi$ אותו סגנון של שאלות מהשיעורי בית (שאלות לא מודרכות)
שעה וחצי לפתור את הבוחן.
ניתן להגיש רק פעם אחת.
מותר להשתמש במחשבון רגיל.
הבוחן הוא מגן.
הודעה נוספת: היום יעלה תרגיל חדש ב$xi$ על הנושאים של: תתי מרחבים, תלות לינארית, $span$ ובסיס.
תזכורת: יהיו $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ . נגיד שהוקטורים תלויים לינארית אם יש צירוף מתאפס שלהם

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

שאינו טריוויאלי (הצירוף הטריוויאלי= הצירוף שבו כל המקדמים שווים ל0).
אחרת, הקבוצה תקרא בלתי תלויה לינארית (בת"ל).
הערה: אם אחד מהוקטורים בקבוצה שווה ל0, אז הקבוצה בהכרח תלויה לינארית.
הוכחה: אפשר לקחת שהמקדמים של כל שאר הוקטורים יהיו $0$, והמקדם של וקטור ה$0$ יהיה למשל $1$, ונקבל:

$$1 \cdot 0 + 0 \cdot v_2 + ...0 \cdot v_m = 0$$

וזה לא צירוף טריוויאלי, כי יש פה מקדם ששונה מ0.
הערה: שני וקטורים $v_1, v_2$ ת"ל אמ"ם אחד מהם הוא כפולה בסקלר של השני.
כלומר, $v_2 = \alpha v_1$ או $v_1 = \beta v_2$.
הוכחה: $\Longleftarrow$ נניח שיש לנו קבוצה של שני וקטורים מהצורה $v, \alpha v$.

$$-\alpha \cdot v + 1 \cdot (\alpha v) = 0$$

זה צירוף מתאפס של הוקטורים, והוא לא טריוואלי, כי המקדם של הוקטור השני הוא 1.
$\Longrightarrow$ נניח ש$v, u$ תלויים לינארית.
כלומר, קיים להם צירוף לינארי מתאפס שיש בו מקדם ששונה מ0.

$$\alpha v + \beta u = 0$$

ולפחות אחד מהמקדמים הוא לא 0.
נניח ש$\alpha \neq 0$.

$$\alpha v = -\beta u$$

בגלל ש$\alpha \neq 0$ אפשר לחלק בו

$$v = \frac{-\beta}{\alpha} u$$

קיבלנו ש$v$ הוא כפולה בסקלר של $u$.
(אם $\alpha = 0$ אז $\beta \neq 0$ ואז נחלק ב$\beta$ ונקבל ש$u$ הוא כפולה של $v$)
לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לא תלויים לינארית, כי הם לא כפולה אחד של השני.
דוגמא לשני וקטורים ת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

משפט: קבוצה של וקטורים $v_1, ..., v_m \in \mathbb{R}^n$ תלויה לינארית אמ"ם קיים $i$ כך ש

$$v_i \in span\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\}$$

הוכחה: $\Longrightarrow$ נניח שיש $i$ כך

$$v_i \in span\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\}$$

כלומר,

$$v_i = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_m v_m$$

עבור $\alpha_j$ כלשהם.
נעביר את $v_i$ אגף ונקבל:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_m v_m - v_i = 0$$

זה לא צירוף טריוויאלי, כי המקדם של $v_i$ הוא $-1$.
הוכחנו שאם וקטור אחד שייך ל$span$ של שאר הוקטורים, הקבוצה ת"ל.
$\Longleftarrow$ נניח ש$v_1, ..., v_m$ ת"ל.
כלומר, קיים צירוף לינארי מתאפס שלפחות אחד המקדמים בו הוא לא $0$.

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$$

ויש איזשהו $i$ כך ש$\alpha_i \neq 0$.
נראה ש$v_i \in span\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\}$.
נעביר את $\alpha_i v_i$ אגף, ונקבל:

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + ... + \alpha_m v_m = -\alpha_i v_i$$

נחלק ב$-\alpha_i$ (ניתן לעשות זאת כי הוא שונה מ0 ).

$$v_i = \frac{\alpha_1}{-\alpha_i}v_1 + ... + \frac{\alpha_{i-1}}{-\alpha_i}v_{i-1} + \frac{\alpha_{i+1}}{-\alpha_i}v_{i+1} + ... + \frac{\alpha_m}{-\alpha_i}v_m$$

קיבלנו ש$v_i$ הוא צירוף לינארי של $v_1, .., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m$. כלומר,

$$v_i \in span\{v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_m\}$$

הגדרה: יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב, ו$A \subseteq V$ תת קבוצה.
נגיד ש$A$ **פורשת** את $V$ אם

$$span(A) = V$$

לדוגמא:

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^3$$

במילים אחרות, אפשר להגיד ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.

הגדרה:
יהי $V \subseteq \mathbb{R}^n$ תת מרחב ו$A \subseteq V$. נגיד ש$A$ היא **בסיס** של $V$, אם:

1. $A$ פורשת את $V$
2. $A$ היא קבוצה בת"ל.

לדוגמא:

1. $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$, כי היא פורשת את $\mathbb{R}^3$, ובשיעור הקודם ראינו שהיא בת"ל.
2. האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס של $\mathbb{R}^3$?

נבדוק אם היא תלויה לינארית: מכיוון שזה שני וקטורים, ואף אחד הוא לא כפולה בסקלר של השני, היא בת"ל.
האם היא פורשת את $\mathbb{R}^3$?
נחשב את ה$span$ שלה.

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & x\\0 & 1 & y\\0 & 0 & z\end{array}\right)$$

היא כבר מדורגת. יש שורת אפסים, לכן נקבל תנאי: $z=0$.
כלומר, ה$span$ של הקבוצה זה כל הוקטורים שהרכיב השלישי שלהם שווה ל$0$. זה לא כל $\mathbb{R}^3$.
הבחנה: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב של כל הוקטורים

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z=0 \right\}$$

הסבר: ראינו שהיא פורשת את המרחב הזה כי

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z=0 \right\}$$

ובנוסף, ראינו שהיא בת"ל.

3. האם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^2$?
תשובה: היא לא בת"ל כי

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

היא כן פורשת את $\mathbb{R}^2$ כי

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \end{array} \right)$$

זאת כבר צורה מדורגת, ואין בה שורת אפסים. לכן אין שום תנאי. כלומר,

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

היא פורשת, אבל לא בת"ל, ולכן לא בסיס.

4. האם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$?
פתרון:
צריך לבדוק תלות לינארית ופרישה.
תלות לינארית:
(תזכורת: איך בודקים אם קבוצה היא ת"ל?
שמים את הוקטורים בעמודות של מטריצה, ומדרגים. השאלה היא האם יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות למערכת ההומוגנית. שזה שקול לשאלה האם יש משתנים חופשיים)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

הגענו למטריצה מדורגת. אין משתנים חופשיים ולכן הקבוצה בת"ל.
פורשת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z-x \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & -2 & z-x-y \end{array}\right)$$

אין שורת אפסים ולכן אין תנאי, זה אומר ש $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$.
כלומר, היא בסיס ל$\mathbb{R}^3$.

מסקנה: למרחב וקטורי יכולים להיות כמה בסיסים. למשל, ראינו של$\mathbb{R}^3$, גם $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

וגם $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס.

הערה: כאשר בודקים אם קבוצה היא בת"ל ופורשת, ניתן להסתפק בדירוג אחד. כלומר, לבדוק את שתי התכונות בפעם אחת.

נשים את הוקטורים בעמודות של מטריצה, ובצד $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ונדרג. כשנגיע לצורה מדורגת נשאל את עצמינו 2 שאלות.

א. האם יש שורת אפסים- אם כן, איזה תנאי נוצר. זה נותן את ה$span$.
ב. האם יש משתנים חופשיים. אם כן- הקבוצה ת"ל. אם לא- הקבוצה בת"ל.

5. האם $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון: ברור ש $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ פורשת את $span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
זה זה ההגדרה של לפרוש. כל קבוצה פורשת את ה$span$ שלה.
אז נותר רק לבדוק האם היא בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הקבוצה ת"ל כי יש משתנה חופשי.

משפט:
1. לכל מרחב וקטורי קיים בסיס.
2. הגודל של כל הבסיסים של אותו מרחב, שווה.
הגדרה: ה**מימד** של מרחב וקטורי שווה לגודל של כל אחד מהבסיסים שלו.
בשביל לחשב את המימד, צריך למצוא בסיס כלשהו, ולספור כמה אברים (וקטורים) יש בו.
דוגמא:
המימד של $\mathbb{R}^n$ הוא $n$.
למשל ל$\mathbb{R}^3$ ראינו ש$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מהווה בסיס, ויש בה 3 אברים.
ל$\mathbb{R}^2$ הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מהווה בסיס, ויש בה שני איברים.
יש 2 דרכים להציג מרחב וקטורי:
1. $span(A)$
2. אוסף הפתרונות של מערכת משוואות.
איך מוצאים בסיס למרחבים שמוצגים ככה?
1. נקח את הקבוצה $A$. היא פורשת. אבל היא לא בהכרח בסיס כי יכול להיות שהיא תלויה לינארית. אנחנו צריכים "לזרוק" את הוקטורים המיותרים.
איך יודעים מי הוקטורים המיותרים?
שמים את כל וקטורי הקבוצה בעמודות של מטריצה, ומדרגים עד לצורה מדורגת.
ברגע שהגענו לצורה מדורגת- כל העמודות שיש בהן משתנה חופשי- ניתן לזרוק את הוקטורים המתאים.
הוקטורים שנשארו, שבעמודה שלהם יש משתנה תלוי, מהווים בסיס.
דוגמא:
מצאו בסיס למרחב

$$span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to .... \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

יש משתנים חופשיים ולכן הקבוצה ת"ל.
בעמודות השלישית והרביעית יש משתנים חופשיים, ולכן הוקטורים האלו "מיותרים"

בסיס למרחב הוא: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

המימד של המחרב שלנו הוא 2.

2. כאשר יש מערכת משוואות, על מנת למצוא בסיס אנחנו פותרים את המערכת, ומגיעים לצורה כללית שתלויה במשתנים חופשיים. נניח וקטור עם $t, s$ . מוציאים את $t$ ו-$s$, והוקטורים שנשארים בפנים מהווים בסיס.

דוגמא:

$$N \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

זה מייצג את אוסף הפתרונות של מערכת משוואות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 0.5R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

נציב $z = t, w = s$

$y = -\frac{3}{4}t - \frac{7}{4}s$

$x = -1.5t - 0.5s$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1.5t - 0.5s \\ -\frac{3}{4}t - \frac{7}{4}s \\ t \\ s \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -1.5 \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.5 \\ -\frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

הקבוצה הזאת היא בסיס.