תזכורת:

F שדה, $d(x)=x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0\in F[x]$. המטריצה המלווה של d היא מטריצה $m\times m$:

$$C_d=\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{m-1} \end{pmatrix}$$

תרגיל:

הפולינום האופייני של C_d הוא d

תזכורת:

מודול מעל $F[x]$ $\Longleftrightarrow$ מרחב וקטורי V מעל F וגם העתקה לינארית $T:V\to V$

(V מקבל את הכפל הסקלרי ב-F) $T(v)=x\cdot v$

משפט:

תהי $A\in M_n(F)$ מטריצה. אזי A דומה למטריצה מן הצורה

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & & \\ & C_{d_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_{d_n} \end{pmatrix}$$

כאשר $d_1|d_2|\dots|d_n\neq 0$ והפולינומים $d_i\in F[x]$ מתוקנים ויחידים.

הוכחה:

A מתאימה להעתקה לינארית $T:F^n\to F^n$ (ביחס לאיזשהו בסיס). המרחב הוקטורי F^n עם T נותן $F[x]$-מודול M.

$F[x]$ תחום ראשי, לפי משפט המיון: $M\cong F[x]^m\times F[x]/(d_1)\times\dots\times F[x]/(d_n)$ כאשר $d_1|d_2|\dots|d_n\neq 0$. ראינו כי $m=0$. נבחר את הבסיס $1+(d_i), x+(d_i),\dots,x^{m_i-1}+(d_i)$ של $F[x]/(d_i)$ כאשר $m_i=\deg d_i$. בעצם בחרנו בסיס חדש של M, והמטריצה של ההעתקה $T:v\mapsto xv$ ביחס לבסיס זה תהיה דומה ל-A. הפעולה של x על $F[x]/(d_i)$ היא:

$$1+(d_i) \longmapsto x+(d_i),\ \dots,\ x^{m_i-1}+(d_i) \longmapsto x^{m_i}+(d_i) \quad \left(=x^{m_i}-d_i+(d_i) = -a_0-a_1x-\dots-a_{m_i-1}x^{m_i-1}+(d_i)\right)$$

$$C_{d_i}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{m_i-1} \end{pmatrix}$$

לכן המטריצה של T ביחס לבסיס המפצ $M=V$ היא

$$\begin{pmatrix} C_{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & C_{d_n} \end{pmatrix}$$

צמודה (דומה) ל-A

זו הצורה הקנונית הרציונלית של A

הגורמים האינווריאנטים d_i מוגדרים עד כדי חברות. לכן אם נדרוש d_i מתוקנים גם הם מוגדרים היטב. התנאי $d_1|d_2|\dots|d_n$ וגם היחידות נובעים ישירות ממשפט המיון.

הגדרה: תהי A מטריצה כנ"ל. הפולינומים $d_1,\dots,d_n$ נקראים גורמים אינווריאנטים של A.

תוצאה:

הפולינום האופייני של A הינו $d_1(x)\cdot d_2(x)\cdot\ldots\cdot d_n(x)$

תוצאה: (משפט קיילי-המילטון)

תהי $A\in M_N(F)$ מטריצה, יהי $f_A(x)=x^N+b_{N-1}x^{N-1}+\dots+b_0$ הפולינום האופייני. אז

$$f_A(A)=A^N+b_{N-1}A^{N-1}+\dots+b_1A+b_0I=0\in M_N(F)$$

הוכחה:

יהי M ה-$F[x]$-מודול המתאים ל-T. $(f_A(A))v=(x^N+b_{N-1}x^{N-1}+b_0)v$ לכן.

$f_A(A)=0 \iff f_Av=0$ לכל $v\in V$ $\iff f_A\in Ann_{F[x]}(M)$. אבל הוכחנו בפעם הקודמת כי $Ann_{F[x]}(M)=(d_n)$

הגורם האינוורי' האחרון = הפולינום המינימלי של A

ולכן $f_A=d_1d_2\cdot\ldots\cdot d_n\in(d_n)=Ann_{F[x]}(M)$

תהי $A\in M_N(F)$ מטריצה, נניח כי F מכיל את כל הערכים העצמיים של A $\Leftarrow$ הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של פולינומים לינאריים מעל F, לכן הגורמים האינווריאנטים מתפרקים כך (כי הפולינום האופייני הוא $d_1\cdot\ldots\cdot d_n$) המחלקים האלמנטרים של M מחלקים גורמים אינווריאנטים. לכן כל מחלק אלמנטרי הוא חזקה של פולינום לינארי $(x-\lambda)^a$, $\lambda\in F$. לפי משפט המיון בצורה של מחלקים

$M \cong F[x]/(x-\lambda_1)^{a_1} \times \dots \times F[x]/(x-\lambda_r)^{a_r}$ אלמנטריים. כאשר λ_i לא בהכרח שונים.

בוחרים את ה-F-בסיס $1+(x-\lambda)^a F[x], (x-\lambda)+(x-\lambda)^a F[x], \dots, (x-\lambda)^{a-1}+(x-\lambda)^a F[x]$ של $F[x]/(x-\lambda)^a$

ביחס לבסיס הזה, הפעולה של T (וכפל סקלרי ב-x) על $F[x]/(x-\lambda)^a$ היא

ום. $0 \le k \le a-2$, אזי $(x-\lambda)^k+I \mapsto x(x-\lambda)^k+I = (x-\lambda)^{k+1}+\lambda(x-\lambda)^k+I$ $\quad \left(I=(x-\lambda)^a F[x]\right)$

$(x-\lambda)^{a-1}+I \mapsto x(x-\lambda)^{a-1}+I = \lambda(x-\lambda)^{a-1}+I$

מטריצה $a \times a$
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \longleftrightarrow J_a(\lambda)$$

לכל A דומה למטריצה יחידה מהצורה
$$\begin{pmatrix} J_{a_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{a_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}$$
צורה קנונית של ז'ורדן

השלמה של חוגים:

יהי R חוג חילופי, יהי $I \trianglelefteq R$. נניח $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$. למשל $R=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $I=\mathbb{Z}\times(0)$ לא מקיים את התנאי.

נגדיר טופולוגיה על R: בסיס של קבוצות פתוחות יהיה $x+I^n=\{x+y : y\in I^n\}$ לכל $x\in R$ לכל n.

כלומר קבוצה $U\subseteq R$ פתוחה אם ורק אם לכל $x\in U$ קיים n_x כך ש- $x+I^n\subseteq U$.

זו אכן טופולוגיה: תהיינה U,V קבוצות פתוחות. $x\in U\cap V$. אזי קיימים n,m כך ש- $x+I^n\subseteq U$, $x+I^m\subseteq V$. אז $x+I^{\max\{n,m\}}=(x+I^n)\cap(x+I^m)\subseteq U\cap V$. לכן $U\cap V$ פתוחה.

כיוון שהנחנו $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$ זו טופולוגית האוסדורף. אכן, יהיו $x,y\in R$ שונים. אזי קיים n כך ש- $x-y\notin I^n$
$\Leftarrow (x+I^n)\cap(y+I^n)=\emptyset$

נגדיר פונקצית מרחק: נבחר $0<\tau<1$.
$$d(x,y)=\inf\{\tau^n : x-y\in I^n\}=\begin{cases} 0 & x=y \\ \tau^{\max\{n : x-y\in I^n\}} & x\ne y \end{cases}$$

זו אכן פונקצית מרחק: צריך להוכיח רק את אי שיוויון המשולש $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

כאן נוכיח משהו יותר חזק (אי שוויון המשולש החזק) $d(x,y)\le \max\{d(x,z),d(z,y)\}$

הוכחה:

נניח x,y,z כולם שונים, אחרת ברור.

יהי n מקסימלי כך ש $x-z\in I^n$

יהי m מקסימלי כך ש $z-y\in I^m$ $\Leftarrow$ $x-y=(x-z)+(z-y)\in I^{\min\{n,m\}}$

$$d(x,y)\le \tau^{\min\{n,m\}} = \max\{\tau^m,\tau^n\} = \max\{d(x,z),d(z,y)\}$$

בודקים שהטופולוגיה הנ"ל היא הטופולוגיה המטרית.

הגדרה: סדרה $\{a_n\}$ של איברים של R נקראת סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים $d(a_n,a_m)<\varepsilon$ $\iff$ לכל k קיים N_k כך ש $a_n-a_m\in I^k$ לכל $n,m\ge N_k$

הגדרה: הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול $L\in R$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $d(a_n,L)<\varepsilon$ $\iff$ לכל k קיים N_k כך ש-$a_n-L\in I^k$ לכל $n\ge N_k$

R נקרא שלם ביחס ל-I אם כל סדרת קושי מתכנסת

דוגמא: $R=\mathbb{Z}$, $I=(p)$ לא שלם. $a_n=1+p+p^2+\dots+p^n$. זו סדרת קושי. נשים לב כי:

$$(1-p)a_n = 1-p^{n+1}\to 1$$

ברור שאם $a_n\to L$ אזי $ra_n\to rL$ לכל $r\in R$. לכן אם $a_n\to L$ אזי $(p-1)L=1$

ואין איבר $L\in\mathbb{Z}$ עם התכונה הזאת