לפני ב שיעורים התבוננו בשתי דוגמאות:

1) $\hat{R}=L[[x]]$, טורי חזקות מעל שדה L

2) $\mathbb{Z}_p$ שלמים p-אדיים

ראינו שלשניהם היה מבנה פשוט:

אידאל מקסימלי (יחיד) $\hat{I}$ ראשי (עבור 1, (x). ועבור ב (p))

וכל שאר האידאלים הלא אפסיים היו חזקות של $\hat{I}$. יהי π יוצר של $\hat{I}$.

אזי לכל $0\neq x\in\hat{R}$ ניתן לרשום בצורה $x=u\pi^n$ כאשר $n\geq 0$, $u\in\hat{R}$ הפיך.

החוגים האלה הם תחומי שלמות, יהי $\hat{F}=Frac\,\hat{R}$ גם להם מבנה פשוט. כל איבר לא אפסי של $\hat{F}$ הוא $\frac{x}{y}=\frac{u\pi^n}{u'\pi^m}=\underbrace{\frac{u}{u'}}_{\text{הפיך ב-}\hat{R}}\pi^{n-m}$ $x,y\in\hat{R}$

לכן כל איבר של $0\neq z\in\hat{F}$ הוא מהצורה $u\pi^n=z$, כאשר $u\in\hat{R}^*$, $n\in\mathbb{N}$. נגדיר $v(z)=n$

($\hat{R}^*=$ קבוצת האיברים ההפיכים של $\hat{R}$)

באופן טבעי, נגדיר פונקצית מרחק על $\hat{F}$. נבחר $0<\tau<1$,

$$d(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \tau^{v(x-y)} & x\neq y\end{cases}$$

זו פונקצית מרחק, מגדירה טופולוגיה מטרית.

מקרה 1:

$$\hat{F}=\{x^n u\}\cup\{0\}=\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n x^n \mid \text{קיים } k\in\mathbb{Z} \text{ כך ש } a_n=0 \text{ לכל } n<k\}$$

טור חזקות עם איבר חופשי לא אפסי

טורי לורן

עבור מקרה ב:

$Frac\,\mathbb{Z}_p=\mathbb{Q}_p$ שדה של מספרים p-אדיים

האם אלו מקרים של תופעה כללית?

הגדרה: יהי F שדה. ערך מוחלט על F הוא פונקציה $|\cdot|:F\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ המקיימת את התכונות הבאות:

1) $|x|=0 \iff x=0$

2) $|xy|=|x||y|$ לכל $x,y\in\mathbb{F}$

3) $|x+y|\le|x|+|y|$ לכל $x,y\in\mathbb{F}$

הערה: $|1|=1$, $|-1|=1$ (נובע מ-(2)) $\Leftarrow$ $|x|=|-x|$ לכל $x\in F$

דוגמאות:

1) הערך המוחלט הרגיל על $\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$. נסמן $|\cdot|_\infty$

2) $\mathbb{F}$ שדה כלשהו. ערך מוחלט טריוויאלי $|x|=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x\neq 0\end{cases}$

3) הערך המוחלט ה-p-אדית. p ראשוני

$x=\frac{m}{n}=\frac{p^a m'}{p^b n'}=p^{a-b}\frac{m'}{n'}$, $p\nmid m', p\nmid n'$. נגדיר $|x|_p=\frac{1}{p^{a-b}}$

כדי לבדוק את תנאי (3) נוכיח לכל $x,y\in\mathbb{Q}$ $|x+y|\le\max\{|x|,|y|\}$. בהינתן ערך מוחלט על שדה אפשר להגדיר טופולוגיה ולהשלים אותה $\hat{F}=\{\text{סדרות קושי}\}/\{\text{סדרות אפסות}\}$

ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס ל-$|\cdot|_\infty$ היא $\mathbb{R}$

ההשלמה של $\mathbb{Q}$ ביחס ל-$|\cdot|_p$ היא $\mathbb{Q}_p$

הגדרה: יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט על שדה F. נזכור שלכל $n\in\mathbb{N}$ הגדרנו $n_F=\underbrace{1_F+\dots+1_F}_{n\text{ פעמים}}$

הערך המוחלט $|\cdot|$ נקרא לא ארכימדי אם קיים N כך ש $|n_F|\le N$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

דוגמאות של ערכים מוחלטים לא ארכימדיים:

1) כל ערך מוחלט של שדה עם מאפיין חיובי

2) הערך המוחלט ה-p-אדי של $\mathbb{Q}$: $n=p^m n', m\ge 0 \Leftarrow |n|_p=\frac{1}{p^m}\le 1$

ערך מוחלט שאינו לא ארכימדי נקרא ארכימדי. לדוגמא, $|\cdot|_\infty$.

טענה:

יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט על $\mathbb{F}$. אזי הוא לא ארכימדי $\Longleftrightarrow$ הוא מקיים את אי שוויון המשולש החזק

($|x+y|\le\max\{|x|,|y|\}$ לכל $x,y\in\mathbb{F}$)

הוכחה:

(⇐) נניח א"י שוויון חזק. אזי $|2_F| = |1_F + 1_F| \le \max\{|1_F|,|1_F|\} = 1$. באינדוקציה, $|n_F| = 1$ לכל $n\in\mathbb{N}$

(⇒) נניח $|n_F|\le N$ לכל $n\in\mathbb{N}$. יהיו $x,y\in F$. בלי הגבלת הכלליות $|y|\le|x|$. אזי

$$|x+y|^k = |(x+y)^k| = \left|\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}_F x^j y^{k-j}\right| \le \sum_{j=0}^{k}\left|\binom{k}{j}_F\right| |x|^j |y|^{k-j} \le \sum_{j=0}^{k} N|x|^k = N(k+1)|x|^k$$

נוציא שורש k-י: $|x+y| = N^{1/k}(k+1)^{1/k}|x|$ לכל k. נשאיף $k\to\infty$:

$$|x+y| \le \lim_{k\to\infty} \underbrace{N^{1/k}(k+1)^{1/k}}_{\to 1}|x| = |x| = \max\{|x|,|y|\}$$

ערכים מוחלטים לא ארכימדיים טובים יותר מארכימדיים

תרגיל:

יהי F שדה עם ערך מוחלט לא-ארכ' ושלם לטופולוגיה המטרית (כל סדרת קושי מתכנסת).

אזי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $(a_k\in F)$ מתכנס $\iff a_k \to 0$

טענה:

יהי F שדה עם $|\cdot|$ לא-ארכימדי. אזי $R=\{x\in F : |x|\le 1\}$ הוא חוג

הוכחה:

סגור לחיבור בגלל אי השוויון החזק. הוא נקרא חוג ההערכה של $|\cdot|$

טענה:

R הוא חוג מקומי. האידאל המקסימלי הוא $I=\{x\in F : |x|<1\}$

הוכחה:

ברור כי I אידאל. צריך להוכיח שכל $x\in R\setminus I$ הוא הפיך ב-R. ברור כי $|x|=1$, לכן $\frac{1}{x}\in F$

$$\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{|1|}{|x|} = 1 \Rightarrow \frac{1}{x}\in R$$

הגדרה: שני ערכים מוחלטים על F נקראים שקולים אם הם מגדירים את אותה הטופולוגיה המטרית

ברור כי $|\cdot|_\infty$, $|\cdot|_p$ עבור p-ים שונים לא שקולים

משפט: (אוסטרובסקי בוגד)

יהי $|\cdot|$ ערך מוחלט לא טריוויאלי על $\mathbb{Q}$. אזי הוא שקול ל-$|\cdot|_\infty$ או ל-$|\cdot|_p$ עבור p ראשוני

תוצאה:

ההשלמות של $\mathbb{Q}$ הם $\mathbb{R}$ ו-$\mathbb{Q}_p$ עבור p ראשוני"ם

$\mathbb{Q}_\infty$

תרגיל: (נוסחת הכפל)

יהי $0\neq x\in\mathbb{Q}$. אזי $\left(\prod_p |x|_p\right)|x|_\infty = 1$

הוכחה (של אוסטרובסקי):

נניח כי $|\cdot|$ לא ארכימדי. אזי $|n|\le 1$ לכל $n\in\mathbb{Z}$ מההוכחה של הטענה הקודמת. אם $|n|=1$

לכל $0\neq n\in\mathbb{Z}$, אזי $|\cdot|$ הוא טריוויאלי, בניגוד להנחה. לכן $\{0\}\subsetneq\{n\in\mathbb{Z}:|n|<1\}$

הקבוצה הזאת היא אידאל ראשוני של $\mathbb{Z}$. כלומר, $\{n\in\mathbb{Z}:|n|<1\}=p\mathbb{Z}$ עבור p ראשוני

לכל $n\in\mathbb{Z}$, אם $n=p^a n'$, $p\nmid n' \Rightarrow |n|=|p^a|\underbrace{|n'|}_{1}=|p|^a$

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \left|\frac{p^a m'}{p^b n'}\right| = |p|^{a-b} = \left|\frac{m}{n}\right|_p^s$$

כאשר s מקיים $|p|_p^s=\left(\frac{1}{p}\right)^s=|p|$ לכן $|\cdot|_p$, $|\cdot|$ שקולים.

עבור המקרה השני, $|\cdot|$ ארכימדי, צריך להוכיח שהוא שקול ל-$|\cdot|_\infty$

דוגמא:

לכל $x\in\mathbb{Q}$, נגדיר $V_p(x)=-\log_p|x|_p$. זה נקרא ההערכה (Valuation) ה-p-אדית

$$V_p(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ c & x=p^c\frac{m'}{n'}\end{cases}$$

אם $x\in\mathbb{Z}$, אזי $V(x)=\max\{n: x\in(p\mathbb{Z})^n\}$

הגדרה: חבורה סדורה היא חבורה אבלית G עם יחס סדר מלא כך ש- $g_1\le g_2 \Rightarrow g_1+h\le g_2+h$

לכל $h\in G$

הגדרה: יהי $\mathbb{F}$ שדה. הערכה (של קרול) על $\mathbb{F}$ היא פונקציה $v: \mathbb{F} \to G \cup \{\infty\}$ כאשר G חבורה סדורה, $g<\infty$, $g+\infty=\infty$ לכל $g\in G$, המקיימת את התנאים הבאים:

1) $x=0 \iff v(x)=\infty$

2) $v(xy)=v(x)+v(y)$ לכל $x,y\in \mathbb{F}$

3) $v(x+y)\ge \min\{v(x),v(y)\}$

דוגמא:

v_p היא הערכה

תרגילים:

1) נבחן שדה $\mathbb{F}$ עם הערכה v. $R=\{x\in \mathbb{F} : v(x)\ge e_G\}$ הוא חוג מקומי עם אידאל מקסימלי
$I=\{x\in \mathbb{F} : v(x) > e_G\}$

2) אם $v(x)\neq v(y)$ אזי $v(x+y)=\min\{v(x),v(y)\}$