הרצאה IX- אינפי 1

תזכורת של הסימונים מסוף ההרצאה הקודמת (8).

<u>משפט</u>: $O^* \Longrightarrow O$, $o \Longrightarrow O$, $a_n \sim b_n \Longrightarrow a_n = O^*(b_n)$.

<u>משפט</u>: יהיו שני טורים, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,

1. אם $a_n = O(b_n)$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס גורר כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
2. אם $a_n = O^*(b_n)$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אמ"מ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

הוכחה:

1. $a_n = O(b_n)$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. ע"פ הגדרה קיים M חיובי כך ש $a_n \le M b_n$ ולכן הגבול סופי (הוכחנו משהו דומה שהרצאה קודמת).
2. הוכחה דומה מאוד לאחד ע"פ המשפט הראשון בהרצאה זו, והגדרות הסימבולים של לנדאו.

דוגמא: $a_n = \frac{1}{n^2+n+1}$ ו- $b_n = \frac{1}{n}$, אזי $a_n \sim b_n$, ע"פ המשפט שניהם מתכנסים, וניתן לראות זאת בקלות (שתיהם מתכנסים לאפס).

<u>מבחני התכנסות ספציפיים:</u>

1. <u>מבחן טלסקופי:</u>

<u>משפט</u>: נתון טור $(A)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מונוטוני יורד. נבנה טור חדש: $(\tilde{A})\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k} \cdot 2^k$. A מתכנס אמ"מ $\tilde{A}$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר סכום חלקי $\tilde{A}_n := \sum_{k=0}^{n} a_{2^k} \cdot 2^k$. ונקבל $\tilde{A}_n \ge a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{2n}-1}) = A_{2^{2n}-1}$. כעת נרשום $\tilde{A}_n = a_1 + 2\sum_{k=1}^{n} a_{2^k} \cdot 2^{k-1} = a_1 + 2\left[a_2 + \overbrace{(2a_4)}^{\le a_3} + \cdots + \overbrace{(a_{2^n} \cdot 2^{n-1})}^{\le a_{2^{n-1}+1}}\right] \le a_1 + 2[a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots +$ $(a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n})]$ ואז קיבלנו כי $\tilde{A}_n \le 2A_{2^n} - a_1$. ולכן מתקיים $A_{2^n-1} \le \tilde{A}_n \le 2A_{2^n} - a_1$ נניח שA מתכנס, אזי קיים C חיובי כך ש$A_M \le C$, ואז ע"פ הפיתוח מתקיים $\tilde{A}_n \le 2C - a_1$ גורר $\tilde{A}_n$ מתכנס.

בכיוון השני, נניח ש$\tilde{A}_n$ מתכנס, ובאופן דומה ניתן להראות כי A מתכנס. משל.

דוגמא 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (P \in R)$, צריך ש$P$ יהיה גדול מאחד אחרת כל העניין מתבדר.. היא יורדת מונוטונית, כעת נסמן את $\tilde{A}$ שלה ע"י ההגדרה הקודמת ונקבל $\tilde{A} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k$ זאת סדרה הנדסית, ולכן נקבל שהסכום קיים רק מה שבסוגריים בין אפס לאחד, ושונה מ0 או מ1.

מסקנה: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \infty$ אמ"א $p>1$.

דוגמא 2: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ נגדיר $a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha} = \frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})n^\alpha} = \frac{4}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})n^\alpha} \sim \frac{2}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ נבצע חילוק בין שניהם ונקבל $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2})n^\alpha}}{\frac{2}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}} = \frac{2}{2} = 1$ ולכן הם דומים. זה מתקיים אם ורק אם $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ ז"א אם $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. <u>מבחן לוגריתמי</u>:

<u>משפט</u>: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים $\lim_{n\to\infty}\frac{ln\frac{1}{a_n}}{\ln(n)} = \alpha$. אז

1. אם $\alpha > 1$ A מתכנס.
2. אם $\alpha < 1$ A מתבדר.

הוכחה:

1. $\frac{ln\frac{1}{a_n}}{\ln(n)} > \alpha'$: $\exists\bar{n}\forall n \geq \bar{n}$ במקרה הזה $1 < \alpha' < \alpha$, קיבלנו $\frac{1}{a_n} > n^{\alpha'}$ ואז כמובן כי $\frac{1}{n^{\alpha'}} > a_n$, והטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha'}}$ מתכנס בהכרח (הוכחנו!) ולכן גם A מתכנס.
2. כעת נניח $\alpha < 1$, כאן נניח הכל הפוך ($\frac{ln\frac{1}{a_n}}{\ln(n)} > \alpha'$: $\exists\bar{n}\forall n \geq \bar{n}$) במקרה הזה $\alpha < \alpha' < 1$ עד שנקבל $\frac{1}{n^{\alpha'}} < a_n$ ושוב הוכחנו בעבר כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha'}}$ מתבדר עבור $\alpha' < 1$ ולכן ע"פ משפט גם A מתבדר.

דוגמא: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$, נבדוק במבחן לוגריתמי מה הגבול שלו, ונקבל $\frac{\ln(\frac{1}{\frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}})}{\ln(n)} = \frac{\ln(\ln(n))\ln(n)}{\ln(n)} = lnln(n) \to \infty$ קיבלנו α גדול מאחד, ולכן A מתכנס.

<u>***מבחני התכנסות של D'Alembert וCauchy.***</u>

3. <u>*מבחן D'Alembert*</u>

<u>משפט</u>: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים. נניח שקיים $\lim_{n\to\infty} D_n := \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. אז

1. אם $q < 1$ A מתכנס.
2. אם $q > 1$ A מתבדר.
3. מה יקרה ב*q=1*??

הוכחה:

1. ניקח $q < q' < 1$ ואז $D_n < q'$ $\exists\bar{n}\forall n \geq \bar{n}$ ואז $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q'$ ושוב ע"י כפל נקבל $a_{n+1} < q' a_n$. ניצור מן שרשרת כך שבסופו של דבר יתקבל $a_{n+1} < q' a_n < q'^2 a_{n-1} < \cdots < q'^{n+1-\bar{n}} a_{\bar{n}} = q'^n \underbrace{q'^{1-\bar{n}} a_{\bar{n}}}_{constant}$. ובעזרת אותו טריק נקבל כי מאחר ו$\sum_{n=1}^{\infty} q'^n < \infty$ $\underbrace{q'^{1-\bar{n}} a_{\bar{n}}}_{constant}$ מתקיים כי A מתכנס. משל.
2. נניח q גדול מאחד. ואז $D_n > 1$ ואז $a_{n+1} > a_n > \cdots > a_{\bar{n}} > 0$ מכאן ש a_n לא שואף ל0, ולכן זה לא מתבדר.
3. דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$. $D_n := \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^p} \to 1$ עבור *p>1* מתכנס, ועבור *p<1* מתבדר. לכן כל מקרה לגופו אם *q=1*. משל.

4. <u>מבחן *Cauchy*</u>

<u>משפט</u>: נתון $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A) שכל איבריו חיוביים.נסמן $q = \lim K_n = \lim sup\sqrt[n]{a_n}$ אזי:

1. אם $q < 1$ אזי הטור מתכנס.
2. אם $q > 1$ אזי הטור מתבדר.
3. אם $q = 1$ אזי אי אפשר להגיד כלום על הטור.

הוכחה:

1. נבחר $q < q' < 1$, מתקיים כי $K_n \to q$. לכן $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} :\ K_n < q'$ ז״א $\sqrt[n]{a_n} < q'$, ולכן $a_n < (q')^n$, $0 \leq q' < 1$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (q')^n$ מתכנס, וע״פ משפט *A* מתכנס. משל.
2. $q > 1$ ז״א $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} :\ K_n > 1$ וע״פ הגדרת ה$\sqrt[n]{a_n} > 1$ ולכן מתקיים כי $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} :\ a_n > 1$. מכאן ש$a_n \nrightarrow 0$. ומכאן ש$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. משל.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$. $K_n = \sqrt[n]{n^p} = (\sqrt[n]{n})^p \underbrace{\longrightarrow}_{n \to \infty} 1$ אבל אם *p>1* הטור מתכנס ואם *p<1* הטור מתבדר.