נכתב על ידי נועם יערי

אינטגרלים

ראינו

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c$$

נחשב:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \overset{\substack{t=x+\frac{\pi}{2} \\ dt=dx}}{\cong} \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\int\frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

בדומה,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}_{a>0}$$

לכן, בדוגמה הזאת, נתרכז במקרה $a=1$.

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{2}(\log|x-1| - \log|x+1|) = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c$$

$$\boldsymbol{\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}}$$

ההצבה של אוילר:

$$t := x + \sqrt{1+x^2}$$

כך אפשר לחלץ את x:

$$t^2 - 2tx + x^2 = (t-x)^2 = 1+x^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 1 = 2tx$$

$$x = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - x = t - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{t^2+1}{2t}$$

$$dx = \frac{wt(wt) - 2(t^2-1)}{(2t)^2} = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{-2t^2}dt = \int\frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + c$$

$$\boldsymbol{\int \sqrt{1+x^2}dx}$$

אפשר עם ההצבה של אוילר ופעולות נוספות. נפתור בשיטת אינטגרציה בחלקים.

$$\overbrace{\int \sqrt{1+x^2}}^{I} = x\sqrt{1+x^2} - \int x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$u = \sqrt{1+x^2}, du = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$x^2 = dv = dx, v = x$$

$$\int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \sqrt{1+x^2} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}_{\text{פתרנו}}$$

$$\Rightarrow I = x\sqrt{1+x^2} - (I - \log|x + \sqrt{1+x^2}| + c$$

נכתב על ידי נועם יערי

אינטגרל של פונקציות רציונליות

הגדרה – פונקציה רציונלית:

מנה של שני פולינומים: $\frac{p(x)}{q(x)_{\neq 0}}$

הערה

בפונקציה רציונלית על ידי חלוקת המונה והמכנה המקדם המוביל של המכנה הפולינום במכנה יהפוך למתוקן ולכן נניח לפי הצורך שזה המצב.

דוגמה

$$\frac{1+2x}{3+7x+5x^2}=\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{5}x}{\frac{3}{5}+\frac{7}{5}x+x^2}$$

למה

אם $p(x),q(x)$ פולינומים זרים, אזי יש פולינומים $s(x),t(x)$ כך ש -

$1=s(x)p(x)+t(x)q(x)$ (ראינו בלינארית 2).

נובע מכך שאפשר לקבל כל פולינום $r(x)$ באגף שמאל במקום 1 (נכפול את שני האגפים ב – $r(x)$)

הוכחה

באינדוקציה על $n\coloneqq \deg p+\deg g$.

$\boxed{n=0}$

מידי.

$\boxed{n>0}$

בהג"כ $\deg p\geq \deg g$. נחלק עם שארית:

$$p(x)=a(x)q(x)+r(x),\deg r<\deg g\leq \deg p$$

$$\deg r+\deg q<\deg p+\deg g$$

r,q זרים (אם $q(x),r(x)\mid t(x)$, אז $t(x)|p(x),q(x)$ בסתירה אלא אם $t(x)=\alpha\in\mathbb{R}$)

מהנחת האינדוקציה, יש הצגה $\underbrace{r(x)}_{p(x)-a(x)q(x)}\quad 1=s(x)q(x)+t(x)$

כלומר $p\ \underbrace{t}_{\text{פולינום}}+g\underbrace{(s-ta)}_{\text{פולינום}}=1$

למה

אם $q(x)=g_1(x)\cdots g_n(x)$ מכפלת פולינומים זרים אז אפשר להציג $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\cdots\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$.

לכן, מספיק לדעת לחשב אינטגרלים מהסוג $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx$ כאשר $q(x)$ חזקה של פולינום אי פריק.

(כל פולינום $q(x)$ מתפרק למכפלה של פולינומים אי פריקים וזו = מכפלה של חזקות של פולינומים אי פריקים זרים)

הוכחה

$q_1(x)$ זר לשאר המכפלה $q_2(x)\cdots q_n(x)$. מהלמה הקודמת אפשר לכתוב

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p_1(x)\big(q_2(x)\cdots q_n(x)\big)}{q(x)}+\frac{t(x)q_1(x)}{q(x)}$$

באינדוקציה על מעלת $q(x)$ אפשר להציג

$$\frac{t(x)}{q_2(x)\cdots q_n(x)}=\frac{p_2(x)}{q_2(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}$$

למה

כל פולינום ממשי הוא מכפלה של פולינומים ממשיים ממעלה לכל היותר 2.

(תזכורת: כיוון שהפולינום ממשי, אם $z\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ שורש, גם $\bar{z}$ שורש. $0=\bar{0}=\overline{p(z)}\overset{p(x)\in\mathbb{R}[x]}{\cong}p(\bar{z})$)

$$\Rightarrow p(x)(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_k)(x-z_1)(x-\overline{z_1})\cdots(x-z_m)(x-\overline{z_m})$$

עבור $\alpha_i\in\mathbb{R},z_i\in\mathbb{C}/\mathbb{R}$ האינדקסים הרלוונטיים.

מסקנה

כל פולינום ממשי אי פריק הוא ממעלה 1 או 2

למה

תמיד אפשר להציג:

$$\frac{p(x)}{\big(q(x)\big)^m}=p_0(x)+\frac{p_1(x)}{q(x)}+\cdots+\frac{p_m(x)}{q(x)^m}$$

כאשר $\deg p_i<\deg g$ לכל i.

הוכחה

נחלק עם שארית: $p(x)=a(x)q(x)+r(x)$

$$\Rightarrow\frac{p(x)}{q(x)^m}=\underbrace{\frac{a(x)}{q(x)^{m-1}}}_{\text{באינדוקציה על } m}+\frac{r(x)^{:=p_m(x)}}{q(x)^m}$$

$$\underbrace{\frac{a(x)}{q(x)^{m-1}}}_{\text{באינדוקציה על } m}=p_0(x)+\frac{p_1(x)}{q(x)}+\cdots\frac{p_{(m-1)}(x)}{q(x)^{m-1}}$$

נכתב על ידי נועם יערי

מסקנה

נותר לחשב אינטגרלים מהצורות:

.1

$$\int \frac{1}{(x-a)^m}dx$$

מיידי מהצבה $t = x - a$ $dt = dx$:

$$\alpha_{\in\mathbb{R}} \int t^{-m}\,dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + c$$

.2

$$\int \frac{cx+d}{(x^2+ax+b)^m}dx$$

$$t = x^2 + ax + b$$

$$dt = (2x+a)dx$$

$$cx + d = \frac{c}{2}\left(2x + \frac{2d}{c} + a - a\right) = \frac{c}{2}(2x+a) + \left(\frac{2d}{c} - a\right) =$$

$$= \text{קבוע} \cdot (2x+d) \cdot \text{עקבו}'$$

$$\text{קבוע} \cdot \int \left(\frac{dt}{t^m}\right) + \text{עקבו}' \cdot \int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^m}$$

.3

$$\int \frac{1}{(x^2+ax+b)^m}dx$$

נרצה להגיע למצב של $t^2 + 1$ במכנה

$$x^2 + ax + b =_{\text{השלמה לריבוע}} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(b - \frac{a^2}{4}\right)}_{=\alpha} = \alpha \cdot \left(\frac{1}{\alpha}\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + 1\right)$$

דרוש $a^2 - 4b < 0 \Leftrightarrow 4b - a^2 > 0 \Leftrightarrow b - \frac{a^2}{4} > 0$

וזה נובע מאי פריקות $x^2 + ax + b$ נותר לחשב $\int \left(\frac{dt}{(1+t)^m}\right)$

$$m = 1: \arctan t + c$$

m כללי: בעזרת אינטגרציה בחלקים $u = \frac{1}{(1+t)^m}$ מקבלים נוסחת נסיגה.