נוסחת טיילור

תזכורת

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f : E \to \mathbb{R}$.

יהי $k \in \mathbb{N}$.

הדיפרנציאל של f ב - x_0 מסדר k מוגדר על-ידי:

$$\mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(h) \quad := \quad \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

אם $f \in C^k(E)$, אז, באופן פורמלי:

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(h) \quad &= \quad \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} \\ &= \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i \right)^k \\ &= \quad \left(\mathrm{d} f(x_0) \right)^k \end{aligned}$$

הגדרה

יהי:

$$\alpha \quad = \quad (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$$

כאשר לכל $1 \le i \le n$:

$$\alpha_i \quad \in \quad \mathbb{Z}_+$$

נסמן:

$$|\alpha| \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

$$\alpha! \quad := \quad \prod_{i=1}^{n} \alpha_i!$$

עבור $x \in \mathbb{R}^n$, נסמן:

$$x^\alpha \quad := \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha^i}$$

עבור $f : E \to \mathbb{R}$, נסמן:

$$\partial^\alpha f \quad := \quad \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

■

משפט (מולטינום)

לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $k \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^k \quad = \quad \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

דוגמה

הוכחת המשפט עבור $n = 2$.

עפ"י משפט הבינום של ניוטון:

$$(x_1 + x_2)^k \quad = \quad \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \cdot x_1^j x_2^{k-j}$$

לכן:

$$(x_1 + x_2)^k \quad = \quad \sum_{\alpha_1+\alpha_2=k} \frac{k!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

עפ"י ההגדרה:

$$(x_1 + x_2)^k \quad = \quad \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

■

הערה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

יהי $k \in \mathbb{N}$.

תהי $f \in C^k(E)$.

אזי:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^{(k)} f(x_0)(h) &= \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(x_0) \cdot h_{i_1} \cdots h_{i_k} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i \right)^k \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x_0) \cdot h^\alpha
\end{aligned}$$

■

משפט (טיילור עם שארית לגרנז')

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f \in C^{m+1}(E)$.

יהי $[x, x_0] \subseteq E$.

אזי:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + \mathcal{R}_m(x)$$

כאשר:

$$\mathcal{R}_m(x) = \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{\partial^\alpha f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

עבור:

$$0 \le \vartheta \le 1$$

הוכחה

נגדיר:

$$\varphi(t) \quad \coloneqq \quad f(x_0 + th)$$

כאשר:

$$h \quad \coloneqq \quad x - x_0$$

$[x, x_0]$ קבוצה קומפקטית המוכלת בקבוצה פתוחה, לכן קיים $\delta > 0$ כך ש: φ מוגדרת בקטע $[-\delta, 1 + \delta]$.

עפ"י כלל השרשרת:

$$\varphi'(t) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0 + th) \cdot h_j$$

עפ"י כלל השרשרת:

$$\varphi''(t) \quad = \quad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0 + th) \cdot h_i h_j$$

באינדוקציה נקבל:

$$\varphi^{(k)}(t) \quad = \quad \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f\big(x_0 + t(x - x_0)\big)(x - x_0)^\alpha$$

עפ"י נוסחת טיילור:

$$\varphi(1) \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(\vartheta)}{(m+1)!}$$

עפ"י הגדרת φ:

$$f(x) \quad = \quad \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + R_m(x)$$

כאשר:

$$\mathcal{R}_m(x) \quad = \quad \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{\partial^\alpha f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big)(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

עבור:

$$0 \quad \le \quad \vartheta \quad \le \quad 1$$

■

משפט (טיילור עם שארית פיאנו)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f \in C^m(E)$.

יהי $[x, x_0] \subseteq E$.

אזי:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + \mathcal{R}_m(x)$$

כאשר:

$$\mathcal{R}_m(x) = r_m(x) \cdot \|x - x_0\|^m$$

עבור:

$$\lim_{x \to x_0} r_m(x) = 0$$

הוכחה

עפ"י משפט (טיילור עם שארית לגרנז') עבור $m - 1$:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le m-1} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha| = m} \frac{\partial^\alpha f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!}$$

לכן:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le m} \frac{\partial^\alpha f(x_0) \cdot (x - x_0)^\alpha}{\alpha!} + \mathcal{R}_m(x)$$

כאשר:

$$\mathcal{R}_m(x) = \sum_{|\alpha| = m} \frac{\Big(\partial^\alpha f\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big) - \partial^\alpha f(x_0)\Big)}{\alpha!} \cdot (x - x_0)^\alpha$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} |h|^\alpha &= \prod_{i=1}^{n} |h_i|^{\alpha_i} \\ &\leq \|h\|^{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i} \\ &\leq \|h\|^{|\alpha|} \end{aligned}$$

לכן:

$$\frac{|\mathcal{R}_m(x)|}{\|x-x_0\|^m} \leq \sum_{|\alpha|=m} \frac{\left|\partial^\alpha f\big(x_0+\vartheta(x-x_0)\big)-\partial^\alpha f(x_0)\right|}{\alpha!}$$

$f \in \mathcal{C}^m(E)$, לכן:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|\mathcal{R}_m(x)|}{\|x-x_0\|^m} = 0$$

■

נקודות אקסטרמום

הגדרה

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f : E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

f מקבלת **מקסימום מקומי** ב - x_0 אם קיימת סביבה U של x_0 כך שלכל $x \in U$, מתקיים :

$$f(x) \quad \leq \quad f(x_0)$$

f מקבלת **מינימום מקומי** ב - x_0 אם קיימת סביבה U של x_0 כך שלכל $x \in U$, מתקיים :

$$f(x) \quad \geq \quad f(x_0)$$

f מקבלת **אקסטרמום מקומי** ב - x_0 אם f מקבלת מקסימום מקומי או מינימום מקומי ב - x_0.

משפט

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f : E \to \mathbb{R}$.

תהי $x_0 \in E$.

אם f מקבלת אקסטרמום מקומי ב - x_0 ו $f -$ דיפרנציאבילית ב - x_0, אז :

$$\mathrm{d}f(x_0) \quad \equiv \quad 0$$

הוכחה

נגדיר :

$$\varphi(t) \quad := \quad f(x_0 + th)$$

E פתוחה, לכן קיים $0 < \delta$ כך ש : φ מוגדרת בקטע $(-\delta, \delta)$.

עפ"י הגדרת φ, φ מקבלת אקסטרמום מקומי ב - 0.

עפ"י משפט פרמה :

$$\varphi'(0) \quad = \quad 0$$

עפ״י הגדרת φ:

$$\varphi'(t) \quad = \quad \mathrm{d}f(x_0+th)(h)$$

לכן:

$$\varphi'(0) \quad = \quad \mathrm{d}f(x_0)(h)$$

לכן:

$$\mathrm{d}f(x_0) \quad \equiv \quad 0$$

■

תזכורת

תהי $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ גזירה בקטע (a,b) כך שלכל $x \in (a,b)$ מתקיים $f'(x) \neq 0$.

אזי, f מונוטונית ממש בקטע (a,b) והפונקציה ההפוכה f^{-1} גזירה בקטע $\big(f(a),f(b)\big)$ (או $\big(f(b),f(a)\big)$), ולכל $y \in \big(f(a),f(b)\big)$ מתקיים:

$$(f^{-1})'(y) \quad = \quad \frac{1}{f'(x)}$$

כאשר:

$$x \quad = \quad f^{-1}(y)$$

הערה

אם העתקה לינארית $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ הפיכה, אז:

$$n \quad = \quad m$$

הערה

אם העתקה לינארית $\Lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ הפיכה, אז:

$$\det\Lambda \quad \neq \quad 0$$

משפט (הפונקציה ההפוכה)

תהי $E \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה.

תהי $f\colon E \to \mathbb{R}^n$.

נניח כי: $f \in C^1(E)$.

תהי $a \in E$ כך ש:

$$\mathrm{J}f(a) \neq 0$$

אזי, קיימת סביבה $U \subseteq E$ של a כך ש - f חד-חד-ערכית על U, התמונה $V = f(U)$ פתוחה והפונקציה ההפוכה $f^{-1}: V \to U$ שייכת ל - $C^{-1}(V)$.

דוגמה

תכונת ההפיכות במשפט אינה גלובלית.

נגדיר:

$$f(x,y) \coloneqq (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

מתקיים:

$$\begin{aligned} \mathrm{J}f(x,y) &= \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \\ &> 0 \end{aligned}$$

לכן, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ולכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, מתקיים:

$$\mathrm{J}f(x,y) \neq 0$$

אולם, f אינה הפיכה על $\mathbb{R}^2$.

■

הוכחה

נסמן:

$$A \coloneqq f'(a)$$

$\mathrm{J}f(a) \neq 0$, לכן:

$$\det A \neq 0$$

לכן, A הפיכה.

$f \in C^1(E)$, לכן:

$$Jf(x) \in C(E)$$

לכן, קיימת סביבה U_0 של a כך שלכל $x \in U_0$ מתקיים:

$$Jf(x) \neq 0$$

נוכיח כי קיימת סביבה U של a וקיים $\lambda > 0$ כך שלכל $x_1, x_2 \in U$, מתקיים:

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \geq \lambda \cdot \|x_1 - x_2\|$$

המשך ההוכחה בהרצאה הבאה.

■