טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 6

שאלה 1

יהי $x \neq a \in D^2$. מצא את $\pi_1(D^2\setminus\{x\}, a)$, כאשר:

א. $x \in \partial D^2$.

פתרון:

אם $x \in \partial D^2$, אזי $D^2\setminus\{x\}$ קבוצה קמורה ב-$\mathbb{R}^2$, ולכן זהו מרחב כוויץ ובפרט פשוט קשר; לכן, $\pi_1(D^2\setminus\{x\}, a) = \{1\}$.

ב. $x \in \text{int } D^2$.

פתרון:

אם $x \in \text{int } D^2$, נראה ש-$S^1 = \partial D^2$ נסג עוותי של $D^2\setminus\{x\}$.

נוכל להניח $x=0$ (כי $D^2\setminus\{x\} \cong D^2\setminus\{0\}$), ונגדיר $H: D^2\setminus\{0\}\times I \longrightarrow D^2\setminus\{0\}$ ע"י $H(y,t) := (1-t)y + t\cdot\frac{y}{\|y\|}$.

H רציפה, וכן לכל $y \in D^2\setminus\{0\}$, $H(y,1) = \frac{y}{\|y\|} \in S^1$; $H(y,0) = y$.

בנוסף, לכל $y \in S^1$ ולכל $t \in I$,

$$H(y,t) = (1-t)y + t\cdot \underbrace{\frac{y}{\underbrace{\|y\|}_{=1}}}_{y} = y - ty + ty = y$$

מסקנה, S^1 נסג עוותי של $D^2\setminus\{0\}$, ולכן

$$\pi_1(D^2\setminus\{x\}, a) \cong \pi_1(D^2\setminus\{0\}, \underset{\neq 0}{b}) \cong \pi_1\left(S^1, \frac{b}{\|b\|}\right) \cong \mathbb{Z}$$

ולסיכום $\pi_1(D^2\setminus\{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

שאלה 2

הראה שאם $h: D^2 \longrightarrow D^2$ הומיאומורפיזם, אזי $h(\partial D^2)=\partial D^2$ ו- $h(\text{int}\, D^2)=\text{int}\, D^2$.

הוכחה:

תהי $x\in\partial D^2$. אזי $h|_{D^2\setminus\{x\}}: D^2\setminus\{x\} \longrightarrow D^2\setminus\{h(x)\}$ גם הומיאומורפיזם,

ובפרט $\underbrace{\pi_1(D^2\setminus\{x\},a)}_{\{1\}}\cong \pi_1(D^2\setminus\{h(x)\},a)$ עבור $a\in D^2$, $a\neq x,h(x)$.

אם בשלילה $h(x)\in \text{int}\, D^2$, נקבל $\{1\}\cong\pi_1(D^2\setminus\{h(x)\},a)\cong\mathbb{Z}$, בסתירה (לאל, עצמו).

לכן $h(x)\in\partial D^2$ לכל $x\in\partial D^2$, ומכאן $h(\partial D^2)\subseteq\partial D^2$.

אבל גם $h^{-1}: D^2\longrightarrow D^2$ הומיאומורפיזם, ולכן $h^{-1}(\partial D^2)\subseteq\partial D^2$,

כלומר $\partial D^2\subseteq h(\partial D^2)$. לכן $h(\partial D^2)=\partial D^2$.

אבל h חד-חד ערכית ועל, ומכאן $h(D^2\setminus\partial D^2)=D^2\setminus\partial D^2$

$$\Downarrow$$

$$h(\text{int}\, D^2)=\text{int}\, D^2$$

שאלה 3

יהי X מרחב טופולוגי, ותהיינה $U,V\subseteq X$ קבוצות פתוחות המקיימות:

א. $X=U\cup V$.

ב. U,V פשוטי קשר.

ג. $U\cap V$ אינו ריק וקשר מסילתית.

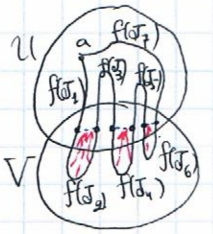
הראה ש-X פשוט קשר.

<u>הוכחה:</u>

נניח $f:S^1\longrightarrow X$ העתקה רציפה.

לפי תנאי א', $\{f^{-1}(U),f^{-1}(V)\}$ כיסוי פתוח של S^1; S^1 מרחב מטרי קומפקטי, ולכן קיים מספר לבג $\delta>0$. נחלק את S^1 ל"קטעים" סגורים שאורכם הוא לכל היותר δ, נסמנם $J_1,\dots,J_n$. אזי לכל i, $f(J_i)\subseteq U$ או $f(J_i)\subseteq V$.

נוכל לצרף קטעים סמוכים זה לזה, ומכאן אפשר להניח שההכלה היא לסירוגין.



בה"כ, נניח ש-$f(J_1)\subseteq U$. את f ניתן לחשוב כעל מסילה סגורה (לולאה) המתחילה ומסתיימת ב-$a\in U$.

לכל i כך ש-$f(J_i)\subseteq V$, תמונות קצוות הקטע ב-$U\cap V$;

לכן אפשר להעביר מסילה בין הקצוות ב-$U\cap V$ והחלק של f שהוא התמונה של J_i הומוטופי ביחס לקצוות למסילה החדשה (לפי תרגיל 4 שאלה 3, כי V פשוט קשר).

קיבלנו ש-f הומוטופית ביחס לקצוות למסילה המוכלת כולה ב-U. אבל U גם פשוט קשר, ולכן זה הומוטופי ל-K_a, כדרוש.

שאלה 4

א. הראה שעבור $n\geq 2$, S^n הוא פשוט קשר.

הוכחה:

נגדיר את הקבוצות הפתוחות הבאות:

$$U=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1} > -\tfrac{1}{10}\}$$

$$V=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid x_{n+1} < \tfrac{1}{10}\}$$

ברור ש- $X=U\cup V$.

לפי ההטלה הסטריאוגרפית U ו-V הומיאומורפיים לכדור פתוח ב-$\mathbb{R}^n$,

ולכן הם פשוטי קשר.

נותר להסתכל על החיתוך $U\cap V=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in S^n \mid -\tfrac{1}{10}<x_{n+1}<\tfrac{1}{10}\}$.

$U\cap V\neq\emptyset$, וכן $U\cap V\cong S^{n-1}\times(0,1)$ גליל, ולכן קשיר מסילתית. 

בסך הכל, U ו-V מקיימות את התנאים של שאלה 3, ולכן

S^n פשוט קשר עבור $n\geq 2$.

ב. היכן הוכחה זו נכשלת אם ננסה ליישם אותה ל-S^1?

פתרון:

אם נגדיר U ו-V כנ"ל, הבעיה תהיה שהחיתוך שלהן

 $U\cap V=\{(x,y) \mid -\tfrac{1}{10}<y<\tfrac{1}{10}\}$

אינו קשיר ובפרט אינו קשיר מסילתית.