# פתרון תרגיל 2 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

# תשע"ז

27 במרץ 2017

1. בכל אחת מהמשוואות נמצא את הע"ע של המטריצה. הצורה הקנונית אינה חד־משמעית, ואפשר להגיע בכל שאלה לצורות שונות.

   (א) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה כבר אלכסונית. הע"ע הם $1, 2$.

לאחר השלמה לריבוע אפשר לקבל את הצורה הקנונית:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

כאשר $a^2 = \frac{9}{8}, b^2 = \frac{9}{4}$. לכן זו אליפסה.

   (ב) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $2 \pm \sqrt{2}$.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} -1 \pm \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר $P$ היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=-1$$

כאשר $a^2=\frac{47}{8\left(2+\sqrt{2}\right)}, b^2=\frac{47}{8\left(2-\sqrt{2}\right)}$.

כמובן שאין נקודות במישור שמקיימות את המשוואה, ולכן זוהי קבוצה ריקה.

(ג) המטריצה שלנו היא:

$$A=\begin{pmatrix} -\frac{11}{196} & \frac{5\sqrt{3}}{56} \\ \frac{5\sqrt{3}}{56} & -\frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\frac{-93\pm5\sqrt{2353}}{1568}$.

הו"ע הם: $\begin{pmatrix} \frac{1\pm\sqrt{2353}}{28\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$, לפני נירמול.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר $P$ היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$(y')^2=(mx')^2$$

כאשר $m^2=\frac{33737+465\sqrt{2353}}{25088}$. אלו שני ישרים.

(ד) המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

והיא כבר אלכסונית. הע"ע הם $1,4$.

לאחר השלמה לריבוע מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{16}=1$$

וזו אליפסה.

(ה) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $\pm\frac{1}{2}$.

הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר $P$ היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

וזו היפרבולה.

(ו) המטריצה היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

הערכים העצמיים הם $-1, 3$.

הו"ע המתאימים הם $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

לאחר הצבה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ כאשר $P$ היא המטריצה המלכסנת (אורתוגונאלית) והשלמה לריבוע, מקבלים:

$$\frac{(x')^2}{6} - \frac{(y')^2}{2} = 1$$

וזו היפרבולה.