פתרון תרגיל 9 במבנים אלגבריים

89-214 סמסטר א' תשע"ח

שאלה 1. סעיף א'.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+7 \\
\hline
x^2-x-1 & x^4+2x^3+3x^2+4x+5 \\
 & -x^4+x^3+x^2 \\
\hline
 & 3x^3+4x^2+4x \\
 & -3x^3+3x^2+3x \\
\hline
 & 7x^2+7x+5 \\
 & -7x^2+7x+7 \\
\hline
 & 14x+12
\end{array}
$$

$$x^4+2x^3+3x^2+4x+5=(x^2+3x+7)(x^2-x-1)+(14x+12).$$

סעיף ב. שקול ל:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2+2x+1 \\
\hline
x^2+x+1 & x^4+x^2+1 \\
 & x^4+x^3+x^2 \\
\hline
 & 2x^3+1 \\
 & 2x^3+2x^2+2x \\
\hline
 & x^2+x+1 \\
 & x^2+x+1 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+2x+1)(x^2+x+1)$$

שאלה 2.

סעיף א.

מס' העמודות המינימלי שסכומן הוא 0 הוא 3 (לדוגמה:ראשונה,שניה ורביעית) ולכן$d_{min} \le 3$

אין עמודות זהות או עמודות שהן 0 ולכן $d_{min} \ge 3$. סה"כ 3.

סעיף ב.

לזהות 2 ולתקן 1.

סעיף ג.

א. נכפול H*v1 ונקבל $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן הטעות נפלה במקום השני בוקטור ולכן הוקטור הנכון הוא (0 0 0 0 0)

ב. נכפול H*v2 ונקבל $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ולכן הוקטור שקיבלנו תקין.

ג. נכפול H*v3 ונקבל $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן הטעות נפלה במקום הרביעי והוקטור הנכון הוא

(0 1 1 0 1)

שאלה 3.

שאלה 4.

פיתרון: יהיו $x, y \in R$. לפי דיסטריבוטיביות, $(x-y)^2 = x^2 - xy + yx - y^2$. מצד אחד מתקיים $x^2 - xy + yx - y^2 = x - xy + yx - y$. מצד שני מתקיים $(x-y)^2 = x - y$, ולכן $x - xy + yx - y = x - y$, משמע $xy = yx$.

שאלה 5.

א. נוכיח רק את "חוק הבליעה" (כמובן שצ"ל גם ש- K היא תת חבורה חיבורית של R [x])

יהיו $g \in R[x]$ ו- $f \in K$ צ"ל $fg \in K$. ואכן
$(gf)(137) = g(137) * f(137) = g(137) \cdot 0 = 0$

ב. לא אידיאל כי זו לא ת"ח חיבורית.

שאלה 6.

פיתרון: סעיף א נכון. לכל $a, b \in I$,
$(1-a)(1-b) = 1 - a - b + ab = 1 - (a + b - ab)$, אבל $a + b - ab \in I$ ולכן
$(1-a)(1-b) \in \{1 - a : a \in I\}$.

סעיף ב. הוכחה:

ברור ש $\cup I_n \neq \emptyset$ כי I_1 לא ריק. יהיו $x, y \in \cup I_n$ אזי קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש- $y \in I_m$, $x \in I_n$. בלי הגבלת הכלליות $n < m$ ולכן $I_n \subseteq I_m$ ואז $x, y \in I_m$ ומתקיים: $x - y \in I_m \subseteq \cup I_n$, ולכל $r \in R$: $rx \in I_m \subseteq \cup I_n$.

סעיף ג.

אין חוג, משום שאין סגירות לכפל, למשל $A \notin \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$.