דף תרגילים 7

תרגיל 1 עבור הפרמטריזציה של המישור $ax+by+cz=d$ שמצאתם בדף תרגילים הקודם, מיצאו את מקדמי גמא, בשתי דרכים:

1. לפי הגדרה.
2. באמצעות הנוסחא $\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}(g_{i\ell;j}-g_{ij;\ell}+g_{j\ell;i})g^{\ell k}$.

פתרון 1

1. פרמטריזציה:
$$x(u^1,u^2)=(u^1,u^2,\frac{d-au^1-bu^2}{c})$$
לכן
$$x_1=(1,0,-\frac{a}{c})$$
$$x_2=(0,1,-\frac{b}{c})$$
כלומר $x_{11}=\vec{0}$ ולכן $\Gamma^1_{11}=\Gamma^2_{11}=0$.
באותו האופן $x_{22}=\vec{0}$ לכן $\Gamma^1_{22}=\Gamma^2_{22}=0$, וכן $x_{12}=\vec{0}$ לכן $\Gamma^1_{12}=\Gamma^2_{12}=0$.
לסיכום $\Gamma^k_{ij}=0$ לכל i,j,k.
2. נחשב את המטריקה
$$g_{11}=\langle x_1,x_1\rangle=1+\frac{a^2}{c^2}$$
$$g_{12}=\langle x_1,x_2\rangle=\frac{ab}{c^2}$$
$$g_{22}=\langle x_2,x_2\rangle=1+\frac{b^2}{c^2}$$
כל מקדמי המטריקה קבועים כלומר $0=\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}=g_{ij;k}$ לכל i,j,k. לכן שוב $\Gamma^k_{ij}=0$ לכל i,j,k.

תרגיל 2 מיצאו פרמטריזציה של גליל עם רדיוס a סביב ציר z וחשבו את הוקטור הנורמל בכל נקודה (היעזרו בתזכורת לעיל).

פתרון 2 נקח את הקו הישר במישור xz המוגדר ע"י $r(\phi)=a, z(\phi)=\phi$ ונקבל את המשטח המבוקש ע"י סיבוב סביר ציר z:
$$x(\theta,\phi)=(a\cos\theta,a\sin\theta,\phi)$$
נגזרות חלקיות:
$$x_\theta=(-a\sin\theta,a\cos\theta,0)$$
$$x_\phi=(0,0,1)$$

לכן:

$$x_\theta \times x_\phi = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$

ולסיום

$$n(\theta,\phi) = \frac{x_\theta \times x_\phi}{|x_\theta \times x_\phi|} = \frac{1}{a}(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

תרגיל 3 חשבו את מקדמי גמא עבור הפרמטריזציה של הגליל שמצאתם בשאלה הקודמת,

1. לפי הגדרה.
2. באמצעות הנוסחא $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{i\ell;j} - g_{ij;\ell} + g_{j\ell;i})g^{\ell k}$.

פתרון 3

1.

$$x_\theta = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (0,0,1)$$

לכן

$$x_{\theta\theta} = (-a\cos\theta, -a\sin\theta, 0)$$

ראינו בתרגיל לעיל כי

$$n(\theta,\phi) = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

כלומר

$$x_{\theta\theta} = -an(\theta,\phi)$$

כלומר $x_{\theta\theta}$ פרופורציוני לנורמל (מאונך למישור משיק) לכן

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$$

כמו כן נקבל $x_{\theta\phi} = x_{\phi\phi} = \vec{0}$ כלומר

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

ולסיכום $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל i,j,k.

2. נחשב את המטריקה

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = a^2$$
$$g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi \rangle = 0$$
$$g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi \rangle = 1$$

כל מקדמי המטריקה קבועים כלומר $g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ לכל i,j,k. לכן שוב $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל i,j,k.

תרגיל 4 (2015 מועד א')
נתון טורוס המתקבל כמשטח סיבוב של המעגל $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ במישור xz סביב ציר ה־ z ($a > b$).

1. מיצאו פרמטריזציה של הטורוס.
2. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.
3. חשבו את סמלי גמא של הטורוס.

פתרון 4

1. פרמטריזציה של העיגול הנתון במישור xz:

$$\phi \mapsto (a+b\cos\phi, 0, b\sin\phi)$$

עבור $\phi \in [0,2\pi]$. לכן פרמטריזציה של הטורוס היא

$$x(\theta,\phi) = ((a+b\cos\phi)\cos\theta, (a+b\cos\phi)\sin\theta, b\sin\phi)$$

2.

$$x_\theta = (-(a+b\cos\phi)\sin\theta, (a+b\cos\phi)\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (-b\sin\phi\cos\theta, -b\sin\phi\sin\theta, b\cos\phi)$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (a+b\cos\phi)^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

3.

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} -2b\sin\phi(a+b\cos\phi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לסיכום: קיבלנו $g_{11;2} = -2b\sin\phi(a+b\cos\phi)$ ו־ $g_{ij;k}=0$ לכל i,j,k אחרים.

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} (a+b\cos\phi)^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{pmatrix}$$

המטריקה אלכסונית.

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{-2b\sin\phi(a+b\cos\phi)} + g_{12;1})\overbrace{g^{22}}^{b^{-2}} = b^{-1}\sin\phi(a+b\cos\phi)$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{-2b\sin\phi(a+b\cos\phi)} - g_{12;1} + g_{21;1})\overbrace{g^{11}}^{(a+b\cos\phi)^{-2}} = -b\sin\phi(a+b\cos\phi)^{-1}$$
$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$
$$\Gamma^1_{22} = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;1})g^{11} = 0$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

תרגיל 5 (2011 מועד א')

בקואורדינטות $(u^1,u^2)=(x,y)$, נניח $f(x,y)=\frac{9}{x}$ ונתבונן במטריקה המוגדרת על ידי נוסחה:

$$g_{ij}(x,y) = f(x,y)^2\delta_{ij}$$

חשבו את המקדמים $\Gamma^1_{11}, \Gamma^1_{12}, \Gamma^1_{21}, \Gamma^1_{22}$ של המטריקה.

פתרון 5 המטריקה שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית עם גורם קונפורמי $\lambda = \frac{81}{x^2}$. מתקיים

$$\lambda_1 = -162x^{-3} \qquad \lambda_2 = 0$$

לכן

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = -x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{22} = -\Gamma^1_{11} = x^{-1}$$
$$\Gamma^1_{12} = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

תרגיל 6 הראו כי $\Gamma^k_{ij} = \langle x_{ij}, x_\ell \rangle g^{\ell k}$
(זו טענה 6.4.1 מההרצאה)

פתרון 6 מההרצאה.

תרגיל 7 יהיו $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. הוכיחו את כלל לייבניץ:

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle.$$

(זו למה 6.5.2 מההרצאה)

פתרון 7 נסמן את הרכיבים של f ב־ $f_1, \dots, f_n$ ואת הרכיבים של g ב־ $g_1, \dots, g_n$. אז

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle' &= \left(\sum_{i=1}^n f_i g_i \right)' = \sum_{i=1}^n (f_i g_i)' = \sum_{i=1}^n f_i' g_i + f_i g_i' \\ &= \sum_{i=1}^n f_i' g_i + \sum_{i=1}^n f_i g_i' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle\end{aligned}$$

תרגיל 8 הראו כי $g_{ij;k} = 2g_{m\{i}\Gamma^m_{j\}k}$.
(זו למה 6.5.3 מההרצאה)

פתרון 8 מההרצאה.

תרגיל 9 בטאו את מקדם Γ^k_{ij} באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.
(זה משפט 6.6.1 מההרצאה)

פתרון 9 מההרצאה.

תרגיל 10 הראו כי אם $g_{ij} = \mu^2 \delta_{ij}$ עבור $0 < \mu \in \mathbb{R}$ אז לכל עקומה $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ מתקיים

$$L(x \circ \alpha) = \mu L(\alpha)$$

באשר $L(\gamma)$ מסמן אורך של עקומה.

פתרון 10

$$\begin{aligned}L(x \circ \alpha) &= \int_a^b \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\alpha^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\alpha^1}{dt} \frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\alpha^2}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\mu^2 \left(\frac{d\alpha^1}{dt} \right)^2 + \mu^2 \left(\frac{d\alpha^2}{dt} \right)^2} dt \\ &= \mu \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d\alpha^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha^2}{dt} \right)^2} dt = \mu L(\alpha)\end{aligned}$$