מתמטיקה לכימאים

עוזי חרוש

תוכן העניינים

1 גבולות

תרגיל 1. חשבו את הגבולות הבאים. פרטו את כל שלבי החישוב.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{2n-3n^2+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^6+2n^8+111}+n}{\sqrt[4]{5n^2+n^3+13n^{16}+3}}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n-5}{7-n^2}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^3+n-6}{8n+n^2}$

הערה. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ו-$|b_n| < M$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

הערה. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ו-אם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

1. אם $b > 1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{a_n} = \infty$
2. אם $-1 < b < 1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{a_n} = 0$
3. אם $b < -1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n)^{a_n}$ לא קיים
4. עבור $b = \pm 1$ לא ידוע.

הערה. להלן שני גבולות חשובים מאוד!

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = 1$

הערה. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (במובן הרחב) אז כל תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תתכנס לאותו גבול.

מסקנה. אם ל-$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש שתי תתי סדרות מתכנסות לגבול שונה אז ל-$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול.

תרגיל 2. חשבו את הגבולות הבאים, או הראו כי אינם קיימים:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\sin\frac{1}{n}}$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\underbrace{\sin \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 0}} = 0$$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$

פתרון.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\underbrace{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}_{\to\infty}}\right) = 0
\end{aligned}$$

.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2^{\frac{n^3+1}{n-2}}}+\sin\frac{1}{n}\right)$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\underbrace{2^{\frac{n^3+1}{n-2}}}_{\to\infty}}+\underbrace{\sin\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}_{\to 0}\right)= \text{"}\infty+0\text{"}=\infty$$

.4 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+6n-8}\right)$

פתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+6n-8}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(5n-\sqrt{25n^2+6n-8}\right)\tfrac{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}\right) =\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{-6n+8}{5n+\sqrt{25n^2+6n-8}}\right) =\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{\frac{-6n}{n}+\frac{8}{n}}{\frac{5n}{n}+\sqrt{\frac{25n^2}{n^2}+\frac{6n}{n^2}-\frac{8}{n^2}}}\right) \xrightarrow{n\to\infty}\\ &\xrightarrow{n\to\infty} \tfrac{-6}{5+\sqrt{25}} = -\tfrac{3}{5}\end{aligned}$$

.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)-\cos(n-1)}{n}$

פתרון.

$\sin(n)$ ו-$\cos(n-1)$ חסומים לכן ההפרש שלהם חסום, בנוסף $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ לכן

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin(n)-\cos(n-1)}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\sin(n)-\cos(n-1)\right)\frac{1}{n}\right)=0$$

.6 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{3\cdot 4^n}{5^n}$

פתרון.

$3\cdot(-1)^n$ חסומה ובנוסף $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$ לכן

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\,\frac{3\cdot 4^n}{5^n}=\lim_{n\to\infty}3\,(-1)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$$

.7 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$

פתרון.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}{\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n}} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{4}\right)^n-\frac{1}{4}} \xrightarrow{n\to\infty}\\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{0-\frac{1}{4}} = -4
\end{aligned}$$

.8 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^{n+1}}{4^n-2^{n+2}}$

פתרון.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^{n+1}}{4^n-2^{n+2}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3\cdot 3^n}{4^n-4\cdot 2^n} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4^n+3\cdot3^n}{4^n}}{\frac{4^n-4\cdot2^n}{4^n}} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+3\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-4\left(\frac{2}{4}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty}\\
&\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1+0}{1-0} = 0
\end{aligned}$$

.9 $\lim_{n\to\infty}\left(3^n+(-3)^n\right)$

פתרון.

ננסה להבין את הסידרה $3^n+(-3)^n$ מתנהגת, עבור n זוגי נקבל $3^n+(-3)^n=2\cdot 3^n$ ועבור n אי-זוגי נקבל $3^n+(-3)^n=0$ כלומר

$$3^n+(-3)^n=\begin{cases}0 & n\in 2\mathbb{N}+1\\ 2\cdot 3^n & n\in 2\mathbb{N}\end{cases}$$

כלומר התת סדרה במקומות הזוגיים שואפת לאינסוף בעוד שהסדרה במקומות האי-זוגיים שואפת ל-0, ולכן לסדרה הנל אין גבול

.10 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)^n$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{2n+3}{3n-5}}_{\to\frac{2}{3}}\right)^{\overbrace{n}^{\to\infty}} = ``\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}" = 0$$

.11 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-\sqrt{n}}{4n+3}\right)^{n^2}$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\frac{5n-\sqrt{n}}{4n+3}}_{\to\frac{5}{4}}\right)^{\overbrace{n}^{\to\infty}} = ``\left(\frac{5}{4}\right)^{\infty}" = \infty$$

.12 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n}$

פתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2+5}{n-2}\right)^{n\frac{n-2}{n-2}} = \\ &\quad 0 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{n-2}\right)^{n-2}\right]^{\frac{n}{n-2}} \xrightarrow{n\to\infty} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} ``\left[e^{5}\right]^{1}" = e^{5}\end{aligned}$$

.13 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+4}\right)^{n^4}$

פתרון.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+4}\right)^{n^4} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+4-5}{n^3+4}\right)^{n^4\frac{n^3+4}{n^3+4}} = \\ &\quad 0 \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{n^3+4}\right)^{n^3+4}\right]^{\frac{n^4}{n^3+4}} \xrightarrow{n\to\infty} \\ &\xrightarrow{n\to\infty} ``\left[e^{-5}\right]^{\infty}" = 0\end{aligned}$$

.14 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

פתרון.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}$$

2 טורים- תרגילים

2.1 טורים חיובים

תרגיל. בדוק האם הטורים באים מתכנסים

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n+8}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n=\frac{4}{2^n+8}\sim\frac{1}{2^n}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{2^n+8}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 2^n}{2^n+8}=4$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין $1-$ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-4n+7}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n=\frac{1}{2n^2-4n+7}\sim\frac{1}{n^2}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n^2-4n+7}}{\frac{1}{n^2}}=2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}}{n^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{4}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha\leq 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{3^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n=\frac{\sin^2(n)}{3^n}\leq\frac{1}{3^n}=b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין -1 ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n=\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}\sim\frac{n}{n^2\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}}{n^{\frac{3}{2}}}=2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha>1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{2n^3+4}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n = \frac{n-5}{2n^3+4} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-5}{2n^3+4}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha > 1$, לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{2n^{\frac{3}{2}}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n = \frac{\ln(n)}{2n^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{2n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2n^{\frac{5}{4}}} = b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{5}{4}}}$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין $1-$ל-1 לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

8. $\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \frac{11}{36} +$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי השווה ל- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$. נשתמש במבחן ההשוואה שני

$$a_n = \frac{2n+1}{(n+1)^2} \sim \frac{1}{n} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = 2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2(n)}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$b_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{\ln^2(n)} = a_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^6(n)}{n^3}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n = \frac{\ln^6(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2} = b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha > 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n^3}}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה הראשון

$$a_n = \frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n^3}} \leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = b_n$$

לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, ואכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ עם $\alpha > 1$ לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{5^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n = \frac{2n-1}{5^n} \sim \frac{n}{5^n} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{5^n}}{\frac{n}{5^n}} = 2$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, כדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ נשתמש במבחן דאלמבר

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. לכן, גם הטור המקורי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n}$ מתכנס.

.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)(n+2)}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+3)}{n(n+1)(n+2)}=0<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\sqrt{2}}}{2n^{\sqrt{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{2}}=\text{"}\frac{1}{2}(1)^{\sqrt{2}}\text{"}=\frac{1}{2}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. בכדי לבדוק את ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ נשתמש במבחן דאלמבר, נבדוק את גבול המנה

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{2^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n(n+1)}{(n+1)^{(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e}<1$$

לכן לפי מבחן דאלמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את התנאי ההכרחי להתכנסות ונקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n = \text{"}\left(\frac{5}{2}\right)^\infty\text{"} = \infty \neq 0$$

לכן הטור מתבדר

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את מבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0 < 1$$

לכן לפי קושי הטור מתכנס.

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נבדוק את מבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

לכן לפי קושי הטור מתכנס.

19. הוכח ש- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^s}$ היא חיובית מונוטונית יורדת לכל sלכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אם רק אם האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$ ואכן

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx = \int\limits_1^\infty x^{-s}dx = \left[\frac{1}{-s+1}x^{-s+1}\right]_1^\infty = \left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-s+1}x^{-s+1} - \frac{1}{-s+1}\right) = \begin{cases} \infty & s \leq 1 \\ \frac{1}{s-1} & s > 1 \end{cases}$$

20. הוכח ש- $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי. נתבונן בפונקציה $f(x) = \frac{1}{x\ln^\alpha(x)}$ היא חיובית מונוטונית יורדת לכל sלכן לפי מבחן האינטגרל הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$ מתכנס אם רק אם האינטגרל $\int\limits_2^\infty f(x)\,dx$ ואכן

$$\int\limits_2^\infty f(x)\,dx = \int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^\alpha(x)}dx = \int\limits_{e^2}^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$$

ומהתרגיל הקודם האינטגרל מתכנס עבור $\alpha > 1$

2.2 טורים כלליים

תרגיל. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos\left(n^2\right)}{3^n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^n\cos\left(n^2\right)}{3^n}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^n}{3^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה $\frac{2}{3}$ לכן לפי מבחן ההשוואה הראשון גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס, לכן יש התכנסות בהחלט.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

כדי לבדוק התכנסות של הטור הנל נשתמש במבחן השורש של קושי

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{-1}{n+1}\right)^n=e^{-1}<1$$

לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מכאן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ מתכנס בהחלט.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)$

פתרון. נשים לב ש-

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\cos\left(\frac{1}{n}\right)\neq 0$$

כלומר הטור לא מקיים את התנאי האחראי להתכנסות טורים, לכן אינו מתכנס בהחלט ולא בתנאי

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln\left(n^2+1\right)}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\ln\left(n^2+1\right)}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(n^2+1\right)}$$

כדי לבדוק התכנסות של הטור הנל ראשית נעזר במבחן השוואה השני

$$a_n = \frac{1}{\ln(n^2+1)} \sim \frac{1}{\ln(n^2)} = b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n^2+1)}}{\frac{1}{\ln(n^2)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n^2)}{\ln(n^2+1)} \stackrel{*}{=} 1$$

*בעזרת לופיטל:

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, כעת נבדוק את התכנסות הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ בעזרת מבחן ההשוואה הראשון

$$b_n = \frac{1}{\ln(n^2)} = \frac{1}{2\ln(n)} \geq \frac{1}{2n} = c_n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר וגם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. לסיכום הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ לא מתכנס בהחלט!.

נעבור לבדוק התכנסות בתנאי. הסדרה $\frac{1}{\ln(n^2+1)}$ היא מונוטונית יורדת המתכנסת ל-0 לכן לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ מתכנס, לכן יש התכנסות בתנאי.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

הטור הנל מתבדר כטור מהצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ עם $\alpha \leq 1$ לכן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ לא מתכנס בהחלט!

נשים לב ש-$b_n = \frac{1}{n}$ היא סדרה חיובית מונוטונית המתכנסת ל-0, לכן הטור לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ מתכנסת לכן יש התכנסות בתנאי

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)}$$

בעזרת מבחן ההשוואה הראשון נקבל ש-

$$a_n \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)} \geq \frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n} = b_n$$

הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, מכאן הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$ לא מתכנס בהחלט!.

נעבור לבדוק התכנסות בתנאי. הסדרה $\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\ln(n)}$ היא מונוטונית יורדת המתכנסת ל-0 לכן לפי לייבניץ הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$ מתכנס, לכן יש התכנסות בתנאי.

.7 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right) > \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.

נסמן $a_n = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)$ ו-$b_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית יורדת
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-1)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ מתכנס בעזרת לייבניץ

לכן לפי מבחן אבל הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

.8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$$

מבחן דלאמבר נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+4)!}{3!(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{(n+3)!}{3!n!3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)}{(n+1)\,3} = \frac{1}{3} < 1$$

לכן בעזרת דלאמבר הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ מתכנס מכאן שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$ מתכנס בהחלט.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ החל מ

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{2}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}\right|$$

החל מ-n מסויים מתקיים $2\cos\frac{1}{n} > 1$, לכן $\left|\frac{2}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}\right| > \frac{1}{\ln(n^2+1)}$ ובסעיף 4 הראנו שהטור הזה מתבדר לכן גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר, משמע הטור לא מתכנס בהחלט.
נבדוק התכנסות בתנאי, נסמן $a_n = 2\cos\frac{1}{n}$ ב- $b_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ אז מתקיים

- a_n מונוטונית
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-1)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$ מתכנסת לפי סעיף 4.

לכן לפני אבל הטור מתכנס בתנאי.

10. $1 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{2}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{2}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} \pm \ldots$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.
נסמן $a_n = \frac{1}{2n-1}$ ו-$b_n = 1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\right| < 100$

לכן לפי מבחן דיריכלה הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

פתרון. ראשית, נבדוק האם הטור מתכנס בהחלט, כלומר נתבונן בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

לכן בעזרת מבחן ההשוואה הראשון הטור $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר לכן אין התכנסות בהחלט.
נסמן $a_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ ו-$b_n=\frac{(-1)^n}{n}$ אז הסדרות הללו מקיימות

- a_n מונוטונית
- a_n חסומה (היות והיא מתכנסת ל-e^2)
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס בעזרת לייבניץ

לכן לפי מבחן אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ מתכנס

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n-n^2}$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור חיובי (החל מ-n מסויים הוא חיובי) לכן יש רק התכנסות/התבדרות. נשתמש במבחן ההשוואה השני

$$a_n=\frac{3^n}{5^n-n^2}\sim\frac{3^n}{5^n}=b_n$$

נחשב את גבול המנה ונקבל

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{5^n-n^2}}{\frac{3^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{5^n-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n^2}{5^n}}=1$$

לכן לפי מבחן ההשוואה השני הטורים $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד, והטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס כטור הנדסי עם מנה בין $1-$ל-1 לכן גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.

2.3 טורי פונקציה

הגדרה. מה זה סדרת פונקציות

דוגמה.

1. $f_n(x)=x^n$ (ציור)
2. $f_n(x)=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ (ציור)

הגדרה. אומרים שסדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנקודה x_0 אם סדרת המספרים $f_n(x_0)$ מתכנסת למספר ואותו נסמן כ-$f(x_0)$ ואז הפונקציה f נקראת הפונקציה הגבולית של f_n

הגדרה. תחום כל הנקודות שבהן f_n מתכנסת נקראת תחום ההתכנסות.

תרגיל. מצא את הפונקציה הגבולית ואת תחום ההתכנסות.

1. $f_n(x)=x^n$

פתרון. אם נקבע את x_0 אז יש לבדוק מה הגבול של $\lim\limits_{n\to\infty} x_0^n$ לכל x_0 במקרה זה ברור ש-

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x_0^n = \begin{cases} 0 & -1 < x_0 < 1 \\ 1 & x_0 = 1 \\ \infty & x_0 > 1 \\ \text{not exist} & x_0 \le -1 \end{cases}$$

לכן תחום ההתכנסות הוא $-1 < x_0 \le 1$

2. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

פתרון. אם נקבע את x_0 אז יש לבדוק מה הגבול של $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n$ לכל x_0 במקרה זה ברור ש-

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x_0}{n}\right)^n = e^{x_0}$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל x.

3. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$

פתרון. אם נקבע את x_0 אז יש לבדוק מה הגבול של $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx_0}$ במקרה זה מתקיים

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+nx_0} = \begin{cases} 1 & x_0 = 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל x.

4. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

פתרון. אם נקבע את x_0 אז יש לבדוק מה הגבול של $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2}$ במקרה זה מתקיים

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx_0}{1+n^2x_0^2} = 0$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל x.

5. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

פתרון. אם נקבע את x_0 אז יש לבדוק מה הגבול של $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{n}}$ במקרה זה מתקיים

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_0^2 + \frac{1}{n}} = |x_0|$$

לכן תחום ההתכנסות הוא כל x_0.

הגדרה. סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה ל-f בקטע $[a,b]$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N(\epsilon)$כך שלכל $n > N$ ולכל $x \in [a,b]$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

דוגמה.

1. $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ (ציור)
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ (ציור)

משפט. סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$ בקטע $[a,b]$ואם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|f_n(x)-f(x)|=0$

תרגיל. בדוק התכנסות במידה שווה בתחום הנתון.

1. $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ לכל x

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_0^2+\frac{1}{n}}=|x_0|$$

כעת נבדוק האם יש התכנסות במידה שווה

$$\begin{aligned}
r_n(x)=|f_n(x)-f(x_0)| &= \left|\sqrt{x_0^2+\tfrac{1}{n}}-|x_0|\right| &=\\
&= \left|\left(\sqrt{x_0^2+\tfrac{1}{n}}-|x_0|\right)\frac{\left|\sqrt{x_0^2+\frac{1}{n}}+|x_0|\right|}{\left|\sqrt{x_0^2+\frac{1}{n}}+|x_0|\right|}\right| &=\\
&= \left|\frac{\frac{1}{n}}{\left|\sqrt{x_0^2+\frac{1}{n}}+|x_0|\right|}\right| &\le\\
&\le \left|\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\right| &= \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

לסיכום לכל x מתקיים

$$0 \quad < \quad r_n(x)<\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$$

מכאן יש התכנסות במידה שווה.

2. $f_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ בתחום $0\le x\le 1$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{1+n^2x_0^2}=0$$

כעת נבדוק את ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקציה הגבול

$$r_n(x)=|f_n(x)-f(x_0)|=\frac{x}{1+n^2x^2}$$

נבדוק מתי יש נקודת מקסימום ל-$r(x)$ ומה ערכה,

$$r_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

מכאן יש נקודות קריטיות ב-$x=\pm\frac{1}{n}$, ב-$x=\frac{1}{n}$ זאת נקודת מקסימום וערכה $\frac{1}{2n}$, כלומר ההפרש המקסימלי שווה ל-$\frac{1}{2n}$ שהוא שואף ל-0 לכן יש התכנסות במידה שווה.

3. $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$ $0\le x<\infty$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-n^2x^2}=0$$

כעת נבדוק את ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקציה הגבול

$$r_n\left(x\right)=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|=nxe^{-n^2x^2}$$

נבדוק מתי יש נקודת מקסימום ל-$r_n\left(x\right)$ ומה ערכה,

$$r_n'\left(x\right)=-2n^3x^2e^{-n^2x^2}+ne^{-n^2x^2}$$

מכאן יש נקודת מקסימום ב-$x=\frac{1}{\sqrt{2}n}$, וערכה $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$, כלומר ההפרש המקסימלי קבוע אינו שואף ל-0! לכן אין התכנסות במ"ש

4. $2\leq x<\infty$ $f_n\left(x\right)=nxe^{-n^2x^2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}nxe^{-n^2x^2}=0$$

כעת נבדוק את ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקציה הגבול

$$r_n\left(x\right)=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x_0\right)\right|=nxe^{-n^2x^2}$$

נבדוק מתי יש נקודת מקסימום ל-$r_n\left(x\right)$ ומה ערכה,

$$r_n'\left(x\right)=-2n^3x^2e^{-n^2x^2}+ne^{-n^2x^2}$$

מכאן יש נקודת מקסימום ב-$x=\frac{1}{\sqrt{2}n}$, אבל אינה בתחום! לכן הנקודת קיצון נמצאת ב-$x=2$ קצה טווח (הנגזרת שלילית), וערכה $\max_{x\geq2}\left\{r_n\left(x\right)\right\}=r\left(2\right)=2n^{-4n^2}\to0$ לכן יש התכנסות במ"ש.

סיכום. בכדי לדעת האם $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במש ל-$f_0\left(x\right)$ בתחום מסויים יש לבדוק האם המקסימום של $\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=r_n\left(x\right)$ מתכנס ל-0 עבור $n\to\infty$

משפט. אם סדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת במש ל-f_0 אז f_0 רציפה. במידה וסדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת ל-f_0 שלא רציפה אז אין התכנסות במ"ש

דוגמה. $f_n\left(x\right)=x^n$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת ל- $f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{cc}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{array}\right.$ שלא רציפה, לכן אין התכנסות נקודתית.

תרגיל. עבור הפונקציות הבאות, מצא את פונקצית הגבול, תחום התכנסות וקבע האם ההתכנסות בתחום ההתכנסות היא התכנסות נקודתית או במ"ש

1. $f_n\left(x\right)=\frac{\cos(nx)}{1+x^2+n^2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית,

$$f\left(x_0\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(nx\right)}{1+x^2+n^2}=0$$

לכל x לכן תחום ההתכנסות הוא כל x. כעת, נבדוק את ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקציה הגבול

$$r_n\left(x\right)=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\frac{\cos\left(nx\right)}{1+x^2+n^2}\leq\frac{1}{n^2}$$

כלומר ההפרש המקסימלי שואף ל-0, לכן יש התכנסות במ"ש בכל תחום ההתכנסות .

2. $f_n(x)=\cos^{2n}(x)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שלכל $x=\pi k$ מתקיים

$$f_n(\pi k)=\cos^{2n}(\pi k)=(\pm 1)^{2n}=1$$

בעוד שעבור $x\neq \pi k$ מתקיים $-1<\cos(x)<1$

$$f_n(x)=\cos^{2n}(x)\to 0$$

לכן

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\neq \pi k\\ 1 & x=\pi k\end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x. נשים לב שפונקצית הגבול לא רציפה בעוד ש-$f_n(x)$ רציפות, לכן התכנסות במ״ש לא אפשרית, וההתכנסות היא התכנסות נקודתית.

3. $f_n(x)=x^n(1-x^n)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, על ידי חולקה לתחומים

$$x<-1,\ x=-1,\ -1<x<1,\ x=1,\ x>1$$

ואז מתקיים

$$f(x)=\begin{cases} \infty & x<-1\\ \text{not exists} & x=-1\\ 0 & -1<x<1\\ 0 & x=1\\ -\infty & x>1\end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא $-1<x\leq 1$ והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f(x)=0$. כדי לבדוק התכנסות במ״ש נגדיר

$$r_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=x^n(1-x^n)$$

בעזרת גזירה נקבל שיש נקודת מקסימום ל-$r_n(x)$ ב- $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ וערכה

$$r_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4}\nrightarrow 0$$

לכן אין התכנסות במ״ש.

4. $f_n(x)=\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{n}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שלכל xהמונה חסום לכן הפונקציה הגבולית היא

$$f(x)=0$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x. כדי לבדוק התכנסות במ״ש נגדיר

$$r_n(x)=|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{n}\right|\leq\frac{1}{n}\to 0$$

כלומר ההפרש בין סדרת הפונקציות לפונקצית הגבול קטן מ-$\frac{1}{n}$ ששואף ל-0, לכן ההתכנסות היא התכנסות במ״ש.

5. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על x_0 נקבל ש-

$$f_n(x_0) = \frac{2x_0}{1+n^2x_0^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא כל x והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f(x) = 0$. כדי לבדוק התכנסות במ״ש נתבונן בהפרש עבור $x > 0$

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{2x}{1+n^2x^2}$$

בעזרת גזירה ונקבל

$$r_n'(x) = \frac{2\cdot\left(1+n^2x^2\right) - 2x\left(2n^2x\right)}{\left(1+n^2x^2\right)^2} = \frac{2-2n^2x^2}{\left(1+n^2x^2\right)^2}$$

כלומר יש נקודת קיצון (בדקו שהיא מקסימום) ב-$x_{max} = \frac{1}{n}$ שערכה

$$r_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2\frac{1}{n}}{1+n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \to 0$$

לכן יש התכנסות במ״ש. למעשה היה צריך לבדוק בצורה דומה גם את המקרה שבו $x < 0$ ואז

$$r_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2x}{1+n^2x^2}\right| = -\frac{2x}{1+n^2x^2}$$

6. $f_n(x) = 4 - x^n$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, על ידי חולקה לתחומים

$$x < -1,\ x = -1,\ -1 < x < 1,\ x = 1,\ x > 1$$

ואז מתקיים

$$f(x) = \begin{cases} \text{not exists} & x < -1 \\ \text{not exists} & x = -1 \\ 4 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ -\infty & x > 1 \end{cases}$$

מכאן שתחום ההתכנסות הוא $-1 < x \leq 1$ והפונקציה הגבולית במקרה הזה היא

$$f(x) = \begin{cases} 4 & -1 < x < 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

נשים לב $f_n(x)$ היא סדרת פונקציות רציפות בעוד ש-$f(x)$ אינה רציפה, לכן אין התכנסות במ״ש.

תרגיל. בדוק האם ישנה התכנסות במ״ש של הסדרות הבאות התחום הנתון

1. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ בתחום $0 \leq x < \frac{1}{2}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על x_0 נקבל ש-

$$f_n\left(x_0\right)=\frac{x_0^n}{1+x_0^n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מכאן שהפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f\left(x\right)=0$. כדי לבדוק התכנסות במ״ש נגדיר

$$r_n\left(x\right)=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\frac{x^n}{1+x^n}$$

נגזור את הפונקציה ונקבל ש-

$$r_n'\left(x\right)=\frac{nx^{n-1}\left(1+x^n\right)-nx^{n-1}x^n}{\left(1+x^n\right)^2}=\frac{1}{\left(1+x^n\right)^2}>0$$

הנגזרת חיובית לכן הפונקציה מונוטינית עולה כלומר

$$r_n\left(x\right)<r_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\to0$$

מכאן יש התכנסות במ״ש

2. $2\leq x\leq4$ $f_n\left(x\right)=\frac{1}{1+x^n}$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על $2\leq x_0\leq4$ נקבל ש-

$$f_n\left(x_0\right)=\frac{1}{1+x_0^n}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מכאן שהפונקציה הגבולית במקרה הזה היא $f\left(x\right)=0$. כדי לבדוק התכנסות במ״ש נגדיר

$$r_n\left(x\right)=\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=\frac{1}{1+x_0^n}\leq\frac{1}{1+2^n}\to0$$

לכן יש התכנסות במ״ש בקטע הנתון.

3. $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ $f_n\left(x\right)=\sin^n\left(x\right)$

פתרון. ראשית, יש למצוא את הפונקציה הגבולית, נשים לב שאם נקבע את x על $0\leq x_0\leq\frac{\pi}{2}$ נקבל ש-

$$f_n\left(x_0\right)=\sin^n\left(x\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}0 & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ 1 & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

נשים לב שפונקצית הגבול אינה רציפה בעוד שהסדרה היא של פונקציות רציפות, לכן אין התכנסות במ״ש.

3 טורי פוקנציה

3.1 התכנסות נקודתית

הגדרה. תהי $f_n\left(x\right)$ סדרת פונקציות המוגדרות התחום E אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)+\ldots$$

נקרא טור פונקציות, נשים לב שעבור הנקודה $x=x_0$ הטור הנל הוא טור מספרים.

הגדרה. אוסף כל הנקודות שבהם הטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty} f_n\left(x_0\right)$ מתכנס נקרא תחום ההתכנסות של הטור.

תרגיל. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

פתרון. כידוע עבור $x > 1$ הטור מתכנס אחרת הוא מתבדר, לכן תחום ההתכנסות הוא $x > 1$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

פתרון. נקבע את x ל-x_0, נתבונן בטור של הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\left|\frac{1-x_0}{1+x_0}\right|^n$$

בעזרת מבחן השורש של קושי נקבל ש-

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}\left|\frac{1-x_0}{1+x_0}\right|^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\left|\frac{1-x_0}{1+x_0}\right| = \left|\frac{1-x_0}{1+x_0}\right|$$

כלומר עבור $x > 0$ יש התכנסות בהחלט של הטור.
עבור הטור $x_0 = 0$ נקבל שהטור הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$$

ולפי לייבניץ יש התכנסות בתנאי.
עבור $x_0 < 0$ מתקיים

$$\left(\frac{1-x_0}{1+x_0}\right) < -1$$

ולכן הטור לא מקיים את התנאי ההתכנסות של $a_n \to 0$ ולכן אין התכנסות.

לסיכום תחום ההתתכנסות הוא $x \geq 0$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{\ln(x)}}$

פתרון. נקבע את x ל-x_0, נתבונן בטור של הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1} n^{-\frac{1}{\ln(x_0)}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\ln(x_0)}}}$$

ידוע שהטור הזה מתכנס עבור חזקה גדולה מ-1, לכן נבדוק מתי זה קורה בעזרת מבחן השורש של קושי נקבל ש-

$$\frac{1}{\ln(x_0)} > 1 \qquad \frac{1}{\ln(x_0)} < \infty$$

$$\ln(x_0) < 1 \qquad \ln(x_0) > 0$$

$$x_0 < e \qquad x_0 > 1$$

כלומר עבור $1 < x_0 < e$ יש התכנסות בהחלט של הטור.
עבור הטור $x_0 \geq e$ נקבל

$$n^{-\frac{1}{\ln(x_0)}}$$

מונו יורד ל-0 לכן לפי לייבניץ יש התכנסות של הטור. מכאן תחום ההתכנסות הוא $x > 1$

3.2 התכנסות במ״ש

הגדרה. יהי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ בתחום E נאמר שהוא מתכנס במידה שווה בתחום $E_0 \subseteq E$ אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במ״ש ב-E_0

דוגמה. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ בתחום $|x|<1$

פתרון. הטור הוא טור טלסקופי המקיים $S(x) = x \leftarrow S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ כעת נתונן בהפרש

$$r(x) = |S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \to 0$$

לכן יש התכנסות במ״ש

משפט. (קושי) יהי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כל שלכל p הוא מקיים

$$S_{n+p}(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

אז הטור מתכנס במידה שווה

משפט. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ״ש אם ורק אם שארית הטור מתכנסת ל-0 כלומר

$$sup\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0$$

משפט. ווירשטרס
יהי טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדר ב-E אם קיים טור מספרים חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ולכל $x \in E$ מתקיים $|f_k(x)| \leq a_k$ החל מ-k מסויים אז הטור הנתון מתכנס במש ב-E.

תרגיל. בדקו התכנסות במש של הטורים הבאים בתחומים הנתונים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ עבור $|x| \leq 1$

פתרון. נשים לב שהטור הוא טור טלסקופי לכן $S_n(x) = x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ בתחום הנתון פונקצית הגבול היא $S(x) = x$ ובמקרה זה מתקיים

$$|S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \longrightarrow 0$$

לכן סדרת הסכומיים החלקיים מתכנסת במ״ש, כלומר הטור מתכנס במש.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ עבור $x \geq 0$

פתרון. לכל $x > 0$ הטור הוא מחליף סימנים עם איבר כללי מונו יורד ששואף ל-0 לכן לפי לייבניץ הוא מתכנס. נתבונן על שארית הטור

$$r_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n} < \sup\frac{1}{x+2(n+1)} \leq \frac{1}{2n+2} \longrightarrow 0$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n}$ ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

אז הוא מתכנס כטור הנדסי לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n^3}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים $\left|\frac{\cos^2(nx)}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2+x^2}$ עבור $-a < x < a$

פתרון. לכל $-a < x < a$ מתקיים

$$\left|\frac{x^2}{n^2+x^2}\right| \le \frac{a^2}{n^2+0^2} = \frac{a^2}{n^2}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2}{n^2}$$

אז הוא מתכנס היות ו-aהוא קבוע, לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2+1}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים

$$\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+n^2+1} \le \frac{1}{n^2}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{\sqrt[5]{x^8+n^8}}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים

$$\left|\frac{\sin^2(nx)}{\sqrt[5]{x^8+n^8}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^8+n^8}} \le \frac{1}{n^{\frac{8}{5}}}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{8}{5}}}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x)}{n^2+1-\cos^2(n)}$ עבור כל x

פתרון. לכל x מתקיים

$$\left|\frac{\sin\left(x\right)}{n^{2}+1-\cos^{2}\left(n\right)}\right|\leq\frac{1}{n^{2}+1-\cos^{2}\left(n\right)}\leq\frac{1}{n^{2}}$$

ואם נתבונן בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$$

אז הוא מתכנס לכן לפי ווישטרס טור הפונקציות מתכנס במ״ש.

משפט. תהי f_n סדרת פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)$ מתכנס במש ב-$[a,b]$ אז

$$\int\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_{n}\left(x\right)dx$$

משפט. תהי f_n סדרת פונקציות בעל נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'\left(x\right)$ מתכנס במש ב-$[a,b]$ והטור המקורי מתכנס קטע $[a,b]$ אז

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}'\left(x\right)$$

דוגמה. מצא את פונקצית הגבול

1. $\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}$ בקטע $-1<x<1$

פתרון. אם נסמן $f_n\left(x\right)=x^n$ אז הטור הבוקש הוא טור הנגזרות, נבדוק את כל התנאים של גזירה איבר איבר

- $f_n\left(x\right)=x^n$ בעל נגזרות רציפות.
- $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)$ מתכנס בתחום.
- $\sum_{n=1}^{\infty}f_n'$ (עזרת משפט שלא למדתם)

לכן

$$\sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n}'\left(x\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}f_{n}\left(x\right)\right)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{\left(1-x\right)^{2}}$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ בקטע $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

פתרון. אם נסמן $f_n\left(x\right)=x^n$ אז הטור הבוקש הוא טור האינטגרלים, ומתקיים

לכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_{n}\left(x\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_{n}\left(x\right)dx=\int\sum_{n=1}^{\infty}f_{n}\left(x\right)dx=\int\frac{1}{1-x}dx=-\ln\left(1-x\right)$$

3.3 טורי חזקות

הגדרה. טור פונקציות הצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

או

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n = a_0 + a_1 \left(x - x_0\right) + a_2 \left(x - x_0\right)^2 + \dots$$

נקרא טור חזקות, לרוב נדבר על האופציה הראשונה.

משפט. אם טור חזקות מתכנס נקודה $x = \alpha$ אז הוא מתכנס בהחלט לכל x קטע $-\alpha < x < \alpha$

משפט. לכל טור חזקות קיים מספר לא שלילי R המקיים שלכל $|x| < R$ הטור מתכנס ולכל $|x| > R$ הטור מתבדר, ומקרה הזה נאמר ש-R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

משפט. רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא

1. (קושי)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

2. (דלמבר)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

תרגיל. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה הקבועה $a_n = 1$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

כצפוי.

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(x - 1\right)^n$

פתרון. ראשית נציב $t = x - 1$ ואז נקבל

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(x - 1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

ואז לפי התרגיל הקודם רדיוס ההתכנסות הוא $R = 1$ כלומר לכל $|t| < 1$הטור מתכנס, אם נחזור למונחים של x נקבל שלכל x $|x - 1| < 1$ הטור מתכנס.

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^n}{n!}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ ולכן

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n!}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(n + 1\right) = \infty$$

כלומר לכל x הטור הנל מתכנס.

.4 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{1}{n^n}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}}==\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

כלומר לכל x הטור הנל מתכנס.

.5 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{n!}{n^n}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}n!}{n^n(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=e$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x|<e$.

.6 $\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=n!$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=0$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום רק עבור $x=0$.

.7 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}x^n$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{3^n}{n!}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^n}{n!}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3}=\infty$$

כלומר לכל x הטור הנל מתכנס.

.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2 2^n}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{1}{n^2 2^n}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2 2^n}}}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt[n]{n^2}=2$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x|<2$.

.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+3}{n}\right|=1$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x|<1$.

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$

פתרון. נשים לב שסדרת המקדמים היא הסדרה $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ולכן

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}{\frac{(-1)^n}{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1$$

כלומר הטור הנל מתכנס תחום $|x|<1$.

4 טור טיילור

הגדרה. טור טיילור של הפונקציה $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים הוא טור החזקות

$$T(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

תרגיל. חשב את טורי טיילור של הפונקציות הבאות:

1. $f(x)=e^x$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{aligned}
f(x)=e^x &\quad\Rightarrow\quad f(0)=1\\
f'(x)=e^x &\quad\Rightarrow\quad f'(0)=1\\
f''(x)=e^x &\quad\Rightarrow\quad f''(0)=1\\
f'''(x)=e^x &\quad\Rightarrow\quad f'''(0)=1\\
\vdots\quad &\qquad\vdots\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

לכן

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

2. $f(x)=\sin(x)$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{aligned}
f(x)=\sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f(0)=0\\
f'(x)=\cos(x) &\quad\Rightarrow\quad f'(0)=1\\
f''(x)=-\sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f''(0)=0\\
f'''(x)=-\cos(x) &\quad\Rightarrow\quad f'''(0)=-1\\
f^{(4)}(x)=\sin(x) &\quad\Rightarrow\quad f^{(4)}(0)=0\\
\vdots\quad &\qquad\vdots\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

3. $f(x) = \cos(x)$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f(0) = 1 \\ f'(x) = -\sin(x) & \Rightarrow & f'(0) = 0 \\ f''(x) = -\cos(x) & \Rightarrow & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \sin(x) & \Rightarrow & f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(x) = \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

4. $f(x) = \ln(x+1)$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc} f(x) = \ln(x+1) & \Rightarrow & f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x+1} & \Rightarrow & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} & \Rightarrow & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} & \Rightarrow & f'''(0) = 2! \\ f^{(4)}(x) = -\frac{2\cdot 3}{(x+1)^n} & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = -3! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x+1)^n} & \Rightarrow & f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \end{array}$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

5. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc} f(x)=\frac{1}{1-x} & \Rightarrow & f(0)=1 \\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2} & \Rightarrow & f'(0)=1 \\ f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3} & \Rightarrow & f''(0)=2! \\ f'''(x)=\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} & \Rightarrow & f'''(0)=3! \\ f^{(4)}(x)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^4} & \Rightarrow & f^{(4)}(0)=4! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0)=(n)! \end{array}$$

לכן

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

.6 $f(x)=\frac{1}{1+x}$

פתרון. נתחיל לחשב את הנגזרות ב-0 ונקבל

$$\begin{array}{ccc} f(x)=\frac{1}{1+x} & \Rightarrow & f(0)=1 \\ f'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2} & \Rightarrow & f'(0)=1 \\ f''(x)=\frac{2}{(1+x)^3} & \Rightarrow & f''(0)=2! \\ f'''(x)=\frac{-2\cdot 3}{(1+x)^4} & \Rightarrow & f'''(0)=3! \\ f^{(4)}(x)=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1+x)^4} & \Rightarrow & f^{(4)}(0)=4! \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1-x)^{n+1}} & \Rightarrow & f^{(n)}(0)=(-1)^n(n)! \end{array}$$

לכן

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

תרגיל. בעזרת התרגיל הקודם חשבו את טורי טיילור של הפונקציות הבאות

.1 $f(x)=\frac{x^m}{1-x}$

פתרון. נשים לב שמתקיים

$$f(x)=\frac{x^m}{1-x}=x^m\frac{1}{1-x}$$

לכן ניתן להעזר בתרגיל הקודם ולקבל ש-

$$T(x)=x^m\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+m}=\sum_{n=m}^{\infty}x^n$$

2. $f(x) = x\sin\left(x^2\right)$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\sin(x)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

לכן

$$T(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(x^2\right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{4n+3}$$

3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\frac{1}{1+x}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

ו-

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} = x\frac{1}{1+\left(x^2\right)^1}$$

לכן

$$T(x) = x\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

4. $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\frac{1}{1+x}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

ו-

$$f(x) = \frac{1}{9+x^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{1}{9}x^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}x\right)^2}$$

לכן

$$T(x) = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\left(\frac{1}{3}x\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^{2n+2}} x^{2n}$$

5. $f(x) = \ln\left(1+x-2x^2\right)$ **רמז**: $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

ו-

$$f(x) = \ln\left(1+x-2x^2\right) = \ln(1-x)(1+2x) = \ln(1-x) + \ln(1+2x)$$

לכן

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(-1+2^n\right)}{n} x^n$$

6. $f(x)=\frac{2x}{1+x-2x^2}$ רמז : מצא A,B כך ש- $\frac{2x}{1+x-2x^2}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{1+2x}$

פתרון. נעזר ברמז ונקבל

$$\frac{2x}{1+x-2x^2}=\frac{A}{(1-x)}+\frac{B}{1+2x}$$
$$\Downarrow$$
$$2x=A(1+2x)+B(1-x)$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-B=2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} A=\frac{2}{3} \\ B=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

מכאן

$$f(x)=\frac{2x}{1+x-2x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+2x}$$

לכן

$$T(x)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}(-1)^n2^n\right]x^n$$

משפט : טור טיילור מתכנס לפונקציה בנקודה $x=x_0$ רק אם

$$r_n(x_0)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x_0)^n\to 0$$

תרגיל. חשב את הביטויים הבאים פיתוח טור טיילור עד סדר חמישי והשוואה אותו למספר האמיתי בעזרת המחשבון

1. e

פתרון. נזכר ש-

$$T_{e^x}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$e^1\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!}1^n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=2.7083$$

בעוד

$$e=2.7182$$

2. $\sin\frac{\pi}{6}$(שימו לב שזה ברדיאנים)

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\sin(x)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\sin\frac{\pi}{6}\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}=\frac{1}{1}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^3+\frac{1}{5!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^5-\frac{1}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^7+\frac{1}{9!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^9=0.4824$$

בעוד

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

3. $\frac{1}{e}$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{e^x}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$e^{-1} \approx \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!}(-1)^n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = 0.375$$

בעוד

$$e^{-1} = 0.3679$$

4. $\ln 1.5$

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\ln(0.5+1) \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 0.5^n = 0.5 - \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{3} - \frac{0.5^4}{4} + \frac{0.5^5}{5} = 0.4072$$

בעוד

$$\ln 1.5 = 0.4055$$

5. $\ln 4$ מה המסקנה שלך לגבי התוצאה במקרה זה?

פתרון. נזכר ש-

$$T_{\ln(x+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

לכן טור טיילור מסדר חמישי יתן לנו

$$\ln(3+1) \approx \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n-1}}{n} 3^n = 3 - \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} - \frac{3^4}{4} + \frac{3^5}{5} = 35.85$$

בעוד

$$\ln(4) = 1.3863$$

המקרה זה שארית טור אינה מתכנסת ל-0 לכן טור טיילור לא יודע להעריך את ערך הפונקציה.

5 פורייה

הגדרה. לכל שתי f, g פונקציות נגדיר את המכפלה הפנימית ביניהם להיות

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx$$

משפט. הקבוצה $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots\right\}$ הוא בסיס אורתוגנלי של מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ כלומר מתקיים

.1

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx = \begin{cases} 0 & f \neq g \\ 1 & f = g \end{cases}$$

2. ולכל פונקציה ניתנת להצגה כצירוף לינארי (טור) אינסופי של $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx\right\}$

משפט. לכל $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right]$$

כאשר

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx) \end{cases}$$

תרגיל. חשב את טור פורייה של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = x$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &= \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx &= \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos(nx) \\ du = 1 & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{bmatrix} \\ & \frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right] &= \\ & \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] &= 0 \end{aligned}$$

ו-

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx &&= \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin(nx) \\ du = 1 & v = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} - \pi\frac{\cos(-n\pi)}{n} + \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right] &&= -\frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}
$$

לכן

$$x \approx \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

2. $f(x) = x + \pi$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\,dx &&= 2\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\cos(nx)\,dx &&= \begin{bmatrix} u = x+\pi & dv = \cos(nx) \\ du = 1 & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{bmatrix} \\
& \frac{1}{\pi}\left[(x+\pi)\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n}dx\right] &&= \\
& \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right] &&= 0
\end{aligned}
$$

ו-

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)\sin(nx)\,dx &&= \left[\begin{array}{cc} u=x+\pi & dv=\sin(nx) \\ du=1 & v=-\frac{\cos(nx)}{n}\end{array}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-(x+\pi)\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n}dx\right] &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n} + 0\frac{\cos(-n\pi)}{n} + \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right] &&= -\frac{2(-1)^n}{n}
\end{aligned}$$

לכן

$$x \approx \pi + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)$$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) &&= \\
& \frac{1}{\pi}\left[-2x\big|_{-\pi}^{0} + x\big|_{0}^{\pi}\right] &&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &&= \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,dx\right) &&= \\
& \frac{1}{\pi}\left[-2\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] &&= 0
\end{aligned}$$

ו-

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -2\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\left[2\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\right] &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\left[2\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) + \frac{(-1)^{n+1}+1}{n}\right] &&= \begin{cases} 0 & n=2k \\ \frac{6}{\pi n} & n=2k-1 \end{cases} \end{aligned}$$

לכן

$$f(x) \approx -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi(2k-1)} \sin((2k-1)x)$$

4. $f(x) = 2\sin(3x)$

פתרון. נשים לב ש-$2\sin(3x)$ הוא איבר בטור ולכן הוא הטור עצמו כלומר

$$a_n = 0$$

ו-

$$b_n = \begin{cases} 2 & n=3 \\ 0 & n\neq 3 \end{cases}$$

5. $f(x) = \cos^2(x)$

פתרון. בעזרת הנוסחא

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

וזה הטור פורייה שלו

6. $f(x) = |x|$

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx &&= \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx &&= 0 \\ & \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx &&= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx &=& \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx &=& \\
&= \tfrac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx &=& \begin{bmatrix} u=x & dv=\cos(nx) \\ du=1 & v=\frac{\sin(nx)}{n}\end{bmatrix} \\
&= \tfrac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\pi} - \int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx\right] &=& \\
& \tfrac{2}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right] &=& 0 \\
& \tfrac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n-1}{n^2}\right] &=& \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & n=2k+1 \\ 0 & n=2k\end{cases}
\end{aligned}$$

ו-

$$b_n = 0$$

בדקו! לכן

$$|x| \approx \sum_{\substack{n=1 \\ n=2k-1}}^{\infty} -\frac{4}{\pi n^2}\cos(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos((2k-1)x)$$

7. $f(x)=e^x$(תשובה סופית)

פתרון. ראשית, נחשב את המקדמים a_n, b_n

$$\begin{aligned}
a_0 &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \\
&= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \tfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi} \\
a_n &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \tfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\quad \tfrac{(-1)^n}{n^2+1}
\end{aligned}$$

ו-

$$b_n = \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = -\tfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\quad \tfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$$

8. $f(x)=x^2$(תשובה סופית)

פתרון. תשובה סופית

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

9. $f(x)=|\sin x|$(תשובה סופית)

פתרון. תשובה סופית- יש לעזור בנוסחא

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left[\sin\left(m+n\right)x+\sin\left(m-n\right)x\right]$$

ואז מקבלים ש-

$$a_0=\frac{4}{\pi}$$

$$a_n=\begin{cases}0 & n=2k-1\\ \frac{4}{\pi(1-4n^2)} & n=2k\end{cases}$$

$$b_n=0$$

לכן

$$\left|\sin x\right|\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos 2nx$$

תרגיל. חשבו את

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

פתרון. כזכור מתקיים

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\left(nx\right)$$

אם נציב $x=\pi$ נקבל ש-

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\left(n\pi\right)$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}$

פתרון. כזכור מתקיים

$$x^2\sim\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\left(nx\right)$$

אם נציב $x=0$ נקבל ש-

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}\cos\left(0\right)$$

$$-\frac{\pi^2}{3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\left(-1\right)^n}{n^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n^2}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

פתרון. כזכור מתקיים

$$|\sin x|\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos 2nx$$

אם נציב $x=0$ נקבל ש-

$$0=\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi\left(1-4n^2\right)}\cos\left(0\right)$$

$$-\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-4n^2}$$

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$$

משפט. משפט ההתכנסות של דרכילה. בנקודה $x=x_0$ טור פורייה מתכנס לערך $\frac{f\left(x_0^-\right)+f\left(x_0^+\right)}{2}$

משפט. גרעין דריכלה

$$D_m\left(t\right)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos mt=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

משפט. אם $f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)$ אז ניתן לבצע גזירה איבר איבר כלומר

$$f'\left(x\right)=\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)\right]\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_nn\sin\left(nx\right)+b_nn\cos\left(nx\right)\right]$$

משפט. ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר באופן הבא

$$F\left(x\right)=\int f\left(t\right)dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin\left(nx\right)-\frac{b_n}{n}\cos\left(nx\right)\right]+K$$

כאשר

$$K=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(t\right)dt$$

תרגיל. חשב את טור פורייה של x^2

פתרון. תנשים לב שהאינטגרל של x הוא $\frac{x^2}{2}$ לכן נעזר בזה:

$$x\approx\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n}\sin\left(nx\right)$$

$$\frac{x^2}{2}\approx\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2\left(-1\right)^{n+1}}{n^2}\cos\left(nx\right)+K$$

$$\frac{x^2}{2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\left(-1\right)^n}{n^2} \cos\left(nx\right) + K$$
$$x^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(-1\right)^n}{n^2} \cos\left(nx\right) + K$$

כאשר

$$K = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi^2 + \pi^2}{3}\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

טור טיילור:
חשב את טור טיילור של

1. $\left(1 - x^2\right) x^2$ לפתוח סוגריים וזה הטור
2. $\frac{x^2}{1-x^2}$

פתרון. נשים לב שמתקיים

$$f\left(x\right) = \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 \frac{1}{1-x^2}$$

לכן ניתן להעזר בתרגיל הקודם ולקבל ש-

$$T\left(x\right) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2+2n}$$

3. e^{x^2}

פתרון. נשים לב שמתקיים

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

לכן

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{2n}$$

6 מדר

6.1 לינארית מסדר ראשון

הגדרה. משוואה מהצורה
$$y'\left(t\right) + p\left(t\right) y\left(t\right) = g\left(t\right)$$
נקראת משוואה לינארית מסדר ראשון.

בכדי לפתור אותה נכפיל ב-$\mu\left(t\right)$ ונקבל

$$\mu\left(t\right) y'\left(t\right) + \mu\left(t\right) p\left(t\right) y\left(t\right) = \mu\left(t\right) g\left(t\right)$$

נדרוש ש-

$$\mu'(t)=\mu(t)\,p(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\ln(\mu(t))=\int p(t)\,dt$$
$$\Downarrow$$
$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$$

ואז נקבל ש-

$$\mu(t)\,y'(t)+\mu(t)\,p(t)\,y(t)=\mu(t)\,g(t)$$
$$\Downarrow$$
$$[\mu(t)\,y(t)]'=\mu(t)\,g(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\mu(t)\,y(t)=\int\mu(t)\,g(t)\,dt+C$$
$$\Downarrow$$
$$y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt+C}{\mu(t)}$$

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים:

1. $y'+3y=t+e^{-2t}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases}p(t)=3\\ g(t)=t+e^{-2t}\end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned}\mu(t)&=e^{\int p(t)dt}&=\\&=e^{\int 3dt}&=e^{3t}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t)=e^{3t}$ ונקבל

$$y'+3y=t+e^{-2t}$$
$$\Downarrow$$
$$e^{3t}y'+3e^{3t}y=e^{3t}t+e^{t}$$
$$\Downarrow$$
$$\left[e^{3t}y\right]'=e^{3t}t+e^{t}$$
$$\Downarrow$$
$$e^{3t}y=\int\left(e^{3t}t+e^{t}\right)dt$$
$$\Downarrow$$
$$e^{3t}y=\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}+e^{t}+C$$
$$\Downarrow$$
$$e^{3t}y=\frac{t}{3}-\frac{1}{9}+e^{-2t}+\frac{C}{e^{3t}}$$

2. $y'-2y=t^2e^{2t}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases}p(t)=-2\\ g(t)=t^2e^{2t}\end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu\left(t\right)$ באופן הבא

$$\begin{aligned}\mu\left(t\right) &= e^{\int p(t)dt} &= \\ &= e^{\int -2dt} &= e^{-2t}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu\left(t\right)=e^{-2t}$ ונקבל

$$\begin{gathered}y'-2y=t^2e^{2t}\\ \Downarrow\\ e^{-2t}y'-2e^{-2t}y=t^2\\ \Downarrow\\ \left[e^{-2t}y\right]'=t^2\\ \Downarrow\\ e^{-2t}y=\int t^2dt\\ \Downarrow\\ e^{-2t}y=\frac{t^3}{3}+C\\ \Downarrow\\ y=\frac{t^3e^{2t}}{3}+Ce^{2t}\end{gathered}$$

3. $y'+y=te^{-t}+1$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ״ל

$$\begin{cases}p\left(t\right)=1\\ g\left(t\right)=te^{-t}+1\end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu\left(t\right)$ באופן הבא

$$\begin{aligned}\mu\left(t\right) &= e^{\int p(t)dt} &= \\ &= e^{\int 1dt} &= e^{t}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu\left(t\right)=e^{t}$ ונקבל

$$\begin{gathered}y'+y=te^{-t}+1\\ \Downarrow\\ e^ty'+e^ty=t+e^t\\ \Downarrow\\ \left[e^ty\right]'=t+e^t\\ \Downarrow\\ e^ty=\int\left(t+e^t\right)dt\\ \Downarrow\\ e^ty=\frac{t^2}{2}+e^t+C\\ \Downarrow\\ y=\frac{t^2}{2e^t}+1+\frac{C}{e^t}\end{gathered}$$

4. $y'-2y=3e^t$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ״ל

$$\begin{cases}p\left(t\right)=-2\\ g\left(t\right)=3e^t\end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int -2dt} = e^{-2t}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^{-2t}$ ונקבל

$$\begin{gathered}y' - 2y = 3e^{t} \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ \left[e^{-2t}y\right]' = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = \int 3e^{-t}dt \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = -3e^{-t} + C \\ \Downarrow \\ y = -3e^{t} + Ce^{2t}\end{gathered}$$

5. $y' + 2ty = 2te^{2t^2}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = 2t \\ g(t) = 2te^{2t^2}\end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned}\mu(t) &= e^{\int p(t)dt} = \\ &= e^{\int 2tdt} = e^{t^2}\end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t) = e^{t^2}$ ונקבל

$$\begin{gathered}y' + 2ty = 2te^{2t^2} \\ \Downarrow \\ e^{t^2}y' - 2e^{-2t}y = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ \left[e^{-2t}y\right]' = 3e^{-t} \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = \int 3e^{-t}dt \\ \Downarrow \\ e^{-2t}y = -3e^{-t} + C \\ \Downarrow \\ y = -3e^{t} + Ce^{2t}\end{gathered}$$

6. $ty' - y = t^2e^{-t}$

פתרון. אם נביא את המשוואה לצורה הרגילה נקבל ש-

$$\begin{array}{c} ty'-y=t^2e^{-t} \\ \Downarrow \\ y'-\frac{1}{t}y=te^{-t} \end{array}$$

מכאן שבתרגיל

$$\begin{cases} p(t)=-\frac{1}{t} \\ g(t)=te^{-t} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} &= \\ &= e^{\int -\frac{1}{t}dt} &= e^{t^2} \\ &= e^{-\ln t} &= \frac{1}{t} \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב-$\mu(t)=\frac{1}{t}$ ונקבל

$$\begin{array}{c} y'-\frac{1}{t}y=te^{-t} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{t}y'-\frac{1}{t^2}y=e^{-t} \\ \Downarrow \\ \left[\frac{1}{t}y\right]'=e^{-t} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{t}y=\int e^{-t}dt \\ \Downarrow \\ \frac{1}{t}y=-e^{-t}+C \\ \Downarrow \\ y=-te^{t}+Ct \end{array}$$

.7 $ty'+2y=t^2-t+1$

פתרון. אם נביא את המשוואה לצורה הרגילה נקבל ש-

$$\begin{array}{c} ty'+2y=t^2-t+1 \\ \Downarrow \\ y'+\frac{2}{t}y=t-1+\frac{1}{t} \end{array}$$

מכאן שבתרגיל

$$\begin{cases} p(t)=\frac{2}{t} \\ g(t)=t-1+\frac{1}{t} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} \mu(t) &= e^{\int p(t)dt} &= \\ &= e^{\int \frac{2}{t}dt} &= e^{t^2} \\ &= e^{2\ln t} &= t^2 \end{aligned}$$

נכפיל את המשוואה ב- $\mu(t) = e^{\frac{t}{2}}$ ונקבל

$$\begin{array}{c} y' + \frac{2}{t}y = t - 1 + \frac{1}{t} \\ \Downarrow \\ t^2y' + 2ty = t^3 - t^2 + t \\ \Downarrow \\ \left[t^2y\right]' = t^3 - t^2 + t \\ \Downarrow \\ t^2y = \int t^3 - t^2 + tdt \\ \Downarrow \\ t^2y = \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C \\ \Downarrow \\ y = \frac{t^2}{4} - \frac{t}{3} + \frac{1}{2} + \frac{C}{t^2} \end{array}$$

.8 $y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t) = \frac{2}{t} \\ g(t) = \frac{\cos t}{t^2} \end{cases}$$

כעת נחשב את $\mu(t)$ באופן הבא

$$\begin{array}{ccccc} \mu(t) & = & e^{\int p(t)dt} & = & \\ & = & e^{\int \frac{2}{t}dt} & = & e^{t^2} \\ & = & e^{2\ln t} & = & t^2 \end{array}$$

נכפיל את המשוואה ב- $\mu(t) = t^2$ ונקבל

$$\begin{array}{c} y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2} \\ \Downarrow \\ t^2y' + 2ty = \cos t \\ \Downarrow \\ \left[t^2y\right]' = \cos t \\ \Downarrow \\ t^2y = \int \cos tdt \\ \Downarrow \\ t^2y = \sin t + C \\ \Downarrow \\ y = \frac{\sin t}{t^2} + \frac{C}{t^2} \end{array}$$

6.2 שיטת וריאצית הפרמטרים

ננחש פתרון כללי למשוואה $y'(t) + p(t)y(t) = g(t)$ מהצורה

$$y = A(t)e^{\int -p(t)dt}$$

אם נציב את הפתרון הזה במשוואה נקבל ש-

$$A'(t) = g(t)e^{\int p(t)dt}$$

תרגיל. פתרו את המשוואות הבאות בעזרת שיטת וריאציית פרמטרים

1. $y'-2y=t^2e^{2t}$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t)=-2 \\ g(t)=t^2e^{2t} \end{cases}$$

כעת נחשב את $A(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)\,e^{\int p(t)dt} &= \\ &= t^2e^{2t}e^{\int -2dt} &= t^2 \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A'(t)\,dt &= \\ &= \int t^2dt &= \tfrac{t^3}{3}+C \end{aligned}$$

מכאן שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= A(t)\,e^{\int -p(t)dt} &= \\ &= \left[\tfrac{t^3}{3}+C\right]e^{\int 2dt} &= \left[\tfrac{t^3}{3}+C\right]e^{2t} \end{aligned}$$

2. $y'+y=te^{-t}+1$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ"ל

$$\begin{cases} p(t)=1 \\ g(t)=te^{-t}+1 \end{cases}$$

כעת נחשב את $A(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)\,e^{\int p(t)dt} &= \\ &= (te^{-t}+1)\,e^{\int 1dt} &= t+e^t \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A'(t)\,dt &= \\ &= \int t+e^tdt &= \tfrac{t^2}{2}+e^t+C \end{aligned}$$

מכאן שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= A(t)\,e^{\int -p(t)dt} &= \\ &= \left[\tfrac{t^2}{2}+e^t+C\right]e^{\int -1dt} &= \left[\tfrac{t^2}{2}+e^t+C\right]e^{-t} \end{aligned}$$

3. $y'-2y=3e^t$

פתרון. ראשית נשים לב שבתרגיל הנ״ל

$$\begin{cases} p(t) = -2 \\ g(t) = 3e^{t} \end{cases}$$

כעת נחשב את $A(t)$ באופן הבא

$$\begin{aligned} A'(t) &= g(t)\, e^{\int p(t)dt} &= \\ &= 3e^{t}e^{\int -2dt} &= 3e^{-t} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} A(t) &= \int A'(t)\, dt &= \\ &= \int 3e^{-t}dt &= -3e^{-t} + C \end{aligned}$$

מכאן שהפתרון הכללי הוא

$$\begin{aligned} y &= A(t)\, e^{\int -p(t)dt} &= \\ &= \left[-3e^{-t} + C\right] e^{\int 2dt} &= \left[-3e^{-t} + C\right] e^{2t} \end{aligned}$$

6.3 משוואות ניתנות להפרדת משתנים

אם המשוואה היא מהצורה

$$y' = M(x)\, L(y)$$

היא ניתנת לפתירה באופן הבא

$$\begin{gathered} y' = M(x)\, l(y) \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = M(x)\, l(y) \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{L(y)} = M(x)\, dx \\ \Downarrow \\ N(y)\, dy = M(x)\, dx \\ \Downarrow \\ \int N(y)\, dy = \int M(x)\, dx \end{gathered}$$

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים:

1. $y' = \frac{x^2}{y}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{x^2}{y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \\ \Downarrow \\ ydy = x^2dx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int x^2dx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C \end{gathered}$$

2. $y'=\frac{x^2}{y(1+x^3)}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered}y'=\frac{x^2}{y(1+x^3)}\\ \Downarrow\\ \frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y(1+x^3)}\\ \Downarrow\\ ydy=\frac{x^2}{1+x^3}dx\\ \Downarrow\\ \int ydy=\int\frac{x^2}{1+x^3}dx\\ \Downarrow\\ \frac{y^2}{2}=\frac{\ln\left(1+x^3\right)}{3}+C\end{gathered}$$

3. $y'+y^2\sin\left(x\right)=0$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered}y'+y^2\sin\left(x\right)=0\\ \Downarrow\\ \frac{dy}{dx}=-y^2\sin\left(x\right)\\ \Downarrow\\ -y^{-2}dy=\sin\left(x\right)dx\\ \Downarrow\\ \int -y^{-2}dy=\int\sin\left(x\right)dx\\ \Downarrow\\ \frac{1}{y}=-\cos\left(x\right)+C\end{gathered}$$

4. $y'=\frac{3x^2-1}{3+2y}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered}y'=\frac{3x^2-1}{3+2y}\\ \Downarrow\\ \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-1}{3+2y}\\ \Downarrow\\ 3+2ydy=3x^2-1dx\\ \Downarrow\\ \int 3+2ydy=\int 3x^2-1dx\\ \Downarrow\\ 3y+y^2=x^3-x+C\end{gathered}$$

5. $y'=\frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y} \\ \Downarrow \\ y + e^y dy = x - e^{-x} dx \\ \Downarrow \\ \int y + e^y dy = \int x - e^{-x} dx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} + e^y = \frac{x^2}{2} + e^{-x} + C \end{gathered}$$

.6 $y' = \frac{x^2}{1+y^2}$

פתרון. נפעיל את ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{x^2}{1+y^2} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2} \\ \Downarrow \\ 1 + y^2 dy = x^2 dx \\ \Downarrow \\ \int 1 + y^2 dy = \int x^2 dx \\ \Downarrow \\ y + \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C \end{gathered}$$

תרגיל. מצאו פתרון פרטי למד״רים הבאים

.1 $y' = (1-2x)\, y^2$ עם תנאי התחלה $y(0) = -\frac{1}{6}$

פתרון. ראשית נפתור את המד״ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = (1-2x)\, y^2 \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = (1-2x)\, y^2 \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y^2} dy = 1 - 2x dx \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y^2} dy = \int 1 - 2x dx \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{y} = x - x^2 + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y} = x - x^2 + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{-\frac{1}{6}} = 0 - 0^2 + C \\ \Downarrow \\ 6 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$-\frac{1}{y} = x - x^2 + 6$$

2. $y' = \frac{1-2x}{y}$ עם תנאי התחלה $y(1) = -2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{1-2x}{y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y} \\ \Downarrow \\ ydy = 1-2xdx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int 1-2xdx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} = x - x^2 + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = x - x^2 + C \\ \Downarrow \\ \frac{(-2)^2}{2} = 1 - 1^2 + C \\ \Downarrow \\ 2 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = x - x^2 + 2 \\ \Downarrow \\ y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4} \end{gathered}$$

3. $xdx + ye^{-x}dy = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} xdx + ye^{-x}dy = 0 \\ \Downarrow \\ ye^{-x}dy = -xdx \\ \Downarrow \\ ydy = -xe^{x}dx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int -xe^{x}dx \\ \Downarrow \\ \frac{y^2}{2} = -xe^x + e^x + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = -xe^x + e^x + C \\ \Downarrow \\ \frac{1^2}{2} = -0e^0 + e^0 + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2} = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = -xe^x + e^x - \frac{1}{2} \\ \Downarrow \\ y = \sqrt{-2xe^x + 2e^x - 1} \end{gathered}$$

4. $y' = \frac{y^2}{x}$ עם תנאי התחלה $y(1) = 2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{y^2}{x} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x}dx \\ \Downarrow \\ \int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x}dx \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{y} = \ln(x) + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y} = \ln(x) + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2} = \ln(1) + C \\ \Downarrow \\ -\frac{1}{2} = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} -\frac{1}{y} = \ln(x) + C \\ \Downarrow \\ y = -\frac{1}{\ln(x) - \frac{1}{2}} \end{gathered}$$

5. $y' = \frac{2x}{y + x^2 y}$ עם תנאי התחלה $y(0) = -2$

פתרון. ראשית נפתור את המד"ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$\begin{gathered} y' = \frac{2x}{y + x^2 y} \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y(1 + x^2)} \\ \Downarrow \\ ydy = \frac{2x}{1 + x^2}dx \\ \Downarrow \\ \int ydy = \int \frac{2x}{1 + x^2}dx \\ \Downarrow \\ -\frac{y^2}{2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C \end{gathered}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C \\ \Downarrow \\ \frac{(-2)^2}{2} = \ln\left(1 + 0^2\right) + C \\ \Downarrow \\ 2 = C \end{gathered}$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$\begin{gathered} \frac{y^2}{2} = \ln\left(1 + x^2\right) + C \\ \Downarrow \\ y = -\sqrt{2\ln(1 + x^2) + 4} \end{gathered}$$

6. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$

פתרון. ראשית נפתור את המד״ר בעזרת ההפרדת המשתנים ונקבל

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{y^3}dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$\Downarrow$$
$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה כדי ונמצא את C

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{1}{2(1)^2} = \sqrt{1+0^2} + C$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{3}{2} = C$$

מכאן הפתרון הפרטי הוא

$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} + C$$
$$\Downarrow$$
$$-\frac{1}{2y^2} = \sqrt{1+x^2} - \frac{3}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{-2\sqrt{1+x^2}+3}}$$

6.4 משוואות מדויקות

הגדרה. משוואה מדוייקת היא משוואה מהצורה

$$M(x,y) + N(x,y)\,y' = 0$$

כאשר מתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

משפט. במקרה של משוואה מדיוקת קיימת פונקציה $\Psi(x,y)$כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

ובמקרה זה הפתרון של המד״ר הוא

$$\Psi(x,y) = C$$

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים

1. $(2x+3) + (2y-2)\,y' = 0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases} M(x,y)=2x+3 \\ N(x,y)=2y-2 \end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y)=0=N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y)=M(x,y) &=& 2x+3 \\ \Psi_y(x,y)=N(x,y) &=& 2y-2 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y)=\int(2x+3)\,dx=x^2+3x+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered} f'(y)=\Psi_y(x,y)=2y-2 \\ \Downarrow \\ f(y)=y^2-2y \end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=x^2+3x+y^2-2y$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered} \Psi(x,y)=C \\ \Downarrow \\ x^2+3x+y^2-2y=C \end{gathered}$$

.2 $\left(3x^2-2xy+2\right)+\left(6y^2-x^2+3\right)y'=0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases} M(x,y)=3x^2-2xy+2 \\ N(x,y)=6y^2-x^2+3 \end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y)=N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y)=-2x=N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y)=M(x,y) &=& 3x^2-2xy+2 \\ \Psi_y(x,y)=N(x,y) &=& 6y^2-x^2+3 \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y)=\int\left(3x^2-2xy+2\right)dx=x^3-x^2y+2x+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered}-x^2+f'(y)=\Psi_y(x,y)=6y^2-x^2+3\\ \Downarrow\\ f(y)=2y^3+3y\end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=x^3-x^2y+2x+2y^3+3y$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered}\Psi(x,y)=C\\ \Downarrow\\ x^3-x^2y+2x+2y^3+3y=C\end{gathered}$$

.3 $\left(2xy^2+2y\right)+\left(2x^2y+2x\right)y'=0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M,N שהן

$$\begin{cases}M(x,y)=2xy^2+2y\\ N(x,y)=2x^2y+2x\end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M_y'(x,y)=N_x'(x,y)$$

ואכן

$$M_y'(x,y)=4x+2=N_x'(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$כך ש-

$$\begin{cases}\Psi_x(x,y)=M(x,y) & = & 2xy^2+2y\\ \Psi_y(x,y)=N(x,y) & = & 2x^2y+2x\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y)=\int\left(2xy^2+2y\right)dx=x^2y^2+2yx+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered}2x^2y+2x+f'(y)=\Psi_y(x,y)=2x^2y+2x\\ \Downarrow\\ f(y)=0\end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=x^2y^2+2yx$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered}\Psi(x,y)=C\\ \Downarrow\\ x^2y^2+2yx=C\end{gathered}$$

.4 $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M, N שהן

$$\begin{cases} M(x,y) = ax+by \\ N(x,y) = bx+cy \end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y) = b = N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) &= ax+by \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) &= bx+cy \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y) = \int (ax+by)\,dx = \frac{a}{2}x^2 + byx + f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$\begin{gathered} bx + f'(y) = \Psi_y(x,y) = bx+cy \\ \Downarrow \\ f(y) = \tfrac{c}{2}y^2 \end{gathered}$$

מכאן

$$\Psi(x,y) = \frac{a}{2}x^2 + byx + \frac{c}{2}y^2$$

והפתרון הוא

$$\begin{gathered} \Psi(x,y) = C \\ \Downarrow \\ \tfrac{a}{2}x^2 + byx + \tfrac{c}{2}y^2 = C \end{gathered}$$

שזאת אלפיסה!

.5 $(e^x \sin y - 2y\sin x) + (e^x\cos y + 2\cos x)\,y' = 0$

פתרון. ראשית זהה את הפונקציות M, N שהן

$$\begin{cases} M(x,y) = e^x\sin y - 2y\sin x \\ N(x,y) = e^x\cos y + 2\cos x \end{cases}$$

כדי שהמשוואה תהיה מדוייקת צריך להתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

ואכן

$$M'_y(x,y) = e^x\cos y - 2\sin x = N'_x(x,y)$$

כעת נחפש פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) &= e^x\sin y - 2y\sin x \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) &= e^x\cos y + 2\cos x \end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה נקבל ש-

$$\Psi(x,y)=\int\left(e^x\sin y-2y\sin x\right)dx=e^x\sin y+2y\cos x+f(y)$$

נגזור לפי y נשוואה ל-$N(x,y)$ ונקבל

$$e^x\cos y+2\cos x+f'(y)=\Psi_y(x,y)=e^x\cos y+2\cos x$$
$$\Downarrow$$
$$f(y)=0$$

מכאן

$$\Psi(x,y)=e^x\sin y+2y\cos x$$

והפתרון הוא

$$\Psi(x,y)=C$$
$$\Downarrow$$
$$e^x\sin y+2y\cos x=C$$

6.5 משוואות לינאריות מסדר שני

הגדרה. משוואה לינארית מסדר שני היא משוואה מהצורה

$$y''+p(t)\,y'+q(t)\,y=g(t)$$

6.5.1 משוואה לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים

הגדרה. משוואה לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים היא משוואה כאשר הפונקציות $p(t)\,,q(t)$ הן פונקציות קבועות כלומר היא מהצורה

$$y''+ay'+by=g(t)$$

ראשית נתייחס למשוואה הוגנית כלומר כאשר $g(t)=0$, במצב כזה נתבונן בשורשים λ_1,λ_2 של המשוואה הריבועית

$$\lambda^2+a\lambda+b=0$$

- $\lambda_1\neq\lambda_2\in\mathbb{R}$ אז

$$y(t)=C_1e^{\lambda_1t}+C_2e^{\lambda_2t}$$

- $\lambda_1=\lambda_2\in\mathbb{R}$ אז

$$y(t)=C_1e^{\lambda t}+C_2xe^{\lambda t}$$

- $\lambda_1=\overline{\lambda_2}=\alpha\pm\beta i\in\mathbb{C}$ אז

$$y(t)=e^{at}\left(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t\right)e^{\lambda t}+C_2xe^{\lambda t}$$

תרגיל. פתור את השוואות הבאות:

1. $y''+2y'-3y=0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2+2\lambda-3=0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda=3,-1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$$

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -1, -2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

3. $6y'' - y' - y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$6\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{1}{3}t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

4. $2y'' - 3y' + y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = 1, \frac{1}{2}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}$$

5. $y'' + 5y' = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 5\lambda = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = 0, -5$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-5t}$$

6. $y'' + 2y' + y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -1, -1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}$$

7. $y'' + 4y = 0$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2i, 2i$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

תרגיל. מצא את הפתרון הפרטי המקיים את תנאי ההתחלה:

1. $y'' + y' - 2y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = y'(0) = 1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2, 1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ -C_1 + 2C_2 = 1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{3} \\ C_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = \frac{1}{3} e^{-t} + \frac{2}{3} e^{2t}$$

2. $y'' + 4y' + 3y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -3, -1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-3t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ -C_1 - 3C_2 = -1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = \frac{5}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$$

3. $y'' + 4y' + 4y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

פתרון. זאת משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים, לכן נפתור את המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

ופתרונותיה הם

$$\lambda = -2, -2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה נקבל שתי משוואות בשני נעלמים שהן

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ -2C_1 + C_2 = -1 \end{cases}$$

הפתרון של המערכת הזאת הוא

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא

$$y(t) = e^{-2t} + te^{-2t}$$

6.6 הורונסקיאן

תהיה מדר הומגנית לינארית מסדר n אז אוסף כל הפתרונות של המד״ר הוא תת מרחב ווקטורי מימד n כלומר קיים לו בסיס על n פונקציות, נרצה למצוא את הבסיס הזה. כדי לברר האם הקבוצה של הפונקציות היא בת״ל נרצה לבדוק אי-תלות. לשם כך נגדיר את הורונסקיאן

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

אם $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ הן פתרונות של המדר בקטע $[a, b]$ אז $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$ בנקודה אם ורק אם $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ בת״ל בקטע. לכן אם נמצא n פונקציות שמקיימות את המד״ר הורונסקיאן שונה מ-0 אז הן בסיס והפתרון הכללי הוא צ״ל שלהן

תרגיל. האם הפונקציות הבאות בת״ל

1. $f_1(t) = t^2 + 5t,\ f_2(t) = t^2 - 5t$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} t^2+5t & t^2-5t \\ 2t & 2t \end{vmatrix} = \\ &= \left(t^2+5t\right)2t-\left(t^2-5t\right)2t = \\ & 20t \neq 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1,f_2\}$בת״ל

2. $f_1(t)=\cos t,\ f_2(t)=4\cos^3 t-3\cos t$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos t & 4\cos^3 t-3\cos t \\ \sin t & 12\cos^2 t\sin t-3\sin t \end{vmatrix} = \\ &= \left(12\cos^2 t\sin t-3\sin t\right)\cos t-\left(4\cos^3 t-3\cos t\right)\sin t = \\ & 8\cos^2 t\sin t \neq 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1,f_2\}$בת״ל

3. $f_1(t)=e^{3t},\ f_2(t)=e^{3(x-1)}$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{3(x-1)} \\ 3e^{3t} & 3e^{3(x-1)} \end{vmatrix} = \\ &= 3e^{3t}e^{3(x-1)}-3e^{3(x-1)}e^{3t} = 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1,f_2\}$ תל

4. $f_1(t)=3t+5,\ f_2(t)=9t+15$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 3t+5 & 9t+15 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = \\ &= 9(3t+5)-3(9t+15) = 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1,f_2\}$ תל

5. $f_1(t)=t,\ f_2(t)=\frac{1}{t}$

פתרון. נחשב את הורונסקיאן

$$\begin{aligned} W(f_1,f_2) &= \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} &= \\ &= \begin{vmatrix} t & \frac{1}{t} \\ 1 & -\frac{1}{t^2} \end{vmatrix} &= \\ &= -\frac{1}{t^2}t-\frac{1}{t} &= 0 \\ &= -\frac{2}{t} &\neq 0 \end{aligned}$$

לכן $\{f_1,f_2\}$ בת"ל

6.7 פתרון בעזרת טורי חזקות

יהיה f פותרת את מד"ר אם נניח ש-f ניתנת לפיתוח על ידי טור חזקות אז טור חזקות ניתן לגזירה איבר איבר וברגע שנציב את הטורים נקבל תנאי המקדמים, תנאים אלו מגדרים הפיתוח של f לטור

תרגיל. מצאו את תנאי נסיגה על מקדמי הטור החזקות של הפתרון המד"ר והביעו את ששת איברים הראשונים בעזרת a_0,a_1

1. $y''+y=0$

פתרון. נציב

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered} y''+y=0 \\ \Downarrow \\ \sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \\ \Downarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+1)(n+2)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0 \\ \Downarrow \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}(n+1)(n+2)+a_n\right)x^n=0 \\ \Downarrow \\ a_{n+2}(n+1)(n+2)+a_n=0 \\ \Downarrow \\ a_{n+2}=-\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} \end{gathered}$$

2. $y'' - y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אם נגזור נקבל

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered} y'' - y = 0 \\ \Downarrow \\ \textstyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ \Downarrow \\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+1)(n+2) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ \Downarrow \\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n\right) x^n = 0 \\ \Downarrow \\ a_{n+2}(n+1)(n+2) - a_n = 0 \\ \Downarrow \\ a_{n+2} = \tfrac{a_n}{(n+1)(n+2)} \end{gathered}$$

3. $y'' - xy' - y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

אם נגזור נקבל

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''-xy'-y=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}-x\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}n\left(n+1\right)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}n\left(n+1\right)-a_nn-a_n\right)x^n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)-a_nn-a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}=\frac{a_n}{n+2}\end{gathered}$$

4. $y''+xy'+2y=0$

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+xy'+2y=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=2}^{\infty}a_nn\left(n-1\right)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}n\left(n+1\right)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^n+\sum_{n=0}^{\infty}2a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+2}n\left(n+1\right)+a_nn+2a_n\right)x^n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}\left(n+1\right)\left(n+2\right)+a_nn+2a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+1}\end{gathered}$$

5. $y''+k^2x^2y=0$(קשה)

פתרון. נציב

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+k^2x^2y=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}+k^2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ \textstyle 2a_2+3a_3+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ \textstyle 2a_2+3a_3+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+4}(n+4)(n+3)x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}k^2a_nx^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ \textstyle 2a_2+3a_3+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{n+4}(n+4)(n+3)x^{n+2}+k^2a_n\right)x^{n+2}=0\\ \Downarrow\\ a_{n+4}(n+4)(n+3)x^{n+2}+k^2a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+4}=-\tfrac{a_nk^2}{(n+4)(n+3)},\ a_2=a_3=0\end{gathered}$$

.6 $2y''+xy'+3y=0$

פתרון. נציב

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

אם נגזור נקבל

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$$

ואם נגזור פעם נוספת נקבל

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}$$

כעת נציב את זה במשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}2y''+xy'+3y=0\\ \Downarrow\\ \textstyle 2\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}+x\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}+3\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}2a_{n+2}n(n+1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}a_nnx^n+\sum_{n=0}^{\infty}3a_nx^n=0\\ \Downarrow\\ \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(3a_{n+2}n(n+1)+a_nn+3a_n)x^n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}3(n+1)(n+2)+a_nn+3a_n=0\\ \Downarrow\\ a_{n+2}=-\tfrac{(n+3)a_n}{(n+1)(n+2)}\end{gathered}$$

6.8 משוואת אוילר

משוואת אוילר היא משוואה ומהצורה

$$x^2y'' + axy' + bx = 0$$

במצב כזה ננחש פתרון מהצורה $y(x) = x^r$ ונקבל

$$\begin{gathered} x^2y'' + axy' + by = 0 \\ \Downarrow \\ x^2r(r-1)x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r = 0 \\ \Downarrow \\ r(r-1)x^r + arx^r + bx^r = 0 \\ \Downarrow \\ r(r-1) + ar + b = 0 \end{gathered}$$

מכאן נקבל שני r-ים שפותרים את המשוואה, לכן אם

1. $r_1 \neq r_2$ הפתרון הוא $y(x) = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}$
2. $r_1 = r_2$ הפתרון הוא $y(x) = C_1|x|^r + C_2\ln(|x|)|x|^r$
3. $r = a \pm bi$ הפתרון הוא $y(x) = |x|^a(C_1\cos(b\ln|x|) + C_2\sin(b\ln|x|))$

תרגיל. פתרו את המשוואה הבאות:

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$\begin{gathered} r(r-1) + 4r + 2 = 0 \\ \Downarrow \\ r^2 + 3r + 2 = 0 \\ \Downarrow \\ r_1, r_2 = -1, -2 \end{gathered}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{1}{x^2}$$

2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + \frac{3}{4}y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = (x+1)^r$$

ונקבל

$$\begin{gathered} r(r-1) + 3r + \tfrac{3}{4} = 0 \\ \Downarrow \\ r^2 + 2r + \tfrac{3}{4} = 0 \\ \Downarrow \\ r_1, r_2 = -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{3}{2} \end{gathered}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1|x+1|^{-\frac{1}{2}} + C_2|x+1|^{-\frac{3}{2}}$$

3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + -3r + 4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 - 4r + 4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = 2$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^2\ln|x|$$

4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + 3r + 5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 + 2r + 5 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = -1 \pm 2i$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(C_1\cos(2\ln|x|) + C_2\sin(2\ln|x|)\right)$$

5. $x^2y'' - xy' + y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$r(r-1) - r + 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 - 2r + 1 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = 1$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln|x|$$

6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = (x-1)^r$$

ונקבל

$$r(r-1) + 8r + 12 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r^2 + 7r + 12 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$r_1, r_2 = -3, -4$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1 \frac{1}{x^3} + C_2 \frac{1}{x^4}$$

7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$

פתרון. נציב

$$y(x) = x^r$$

ונקבל

$$\begin{gathered} r(r-1) + 6r - 1 = 0 \\ \Downarrow \\ r^2 + 5r - 1 = 0 \\ \Downarrow \\ r_1, r_2 = \tfrac{-5 \pm \sqrt{29}}{2} \end{gathered}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$y(x) = C_1 |x|^{\frac{-5+\sqrt{29}}{2}} + C_2 |x|^{\frac{-5-\sqrt{29}}{2}}$$

6.9 פתרון סביב נקודה סינגולרית רגולרית

הנקודה $x_0 = 0$ נקראת נקודה סינגולרית של

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

אם

$$\lim_{x \to x_0} xp(x) = p_0$$

וגם

$$\lim_{x \to x_0} x^2 q(x) = q_0$$

אז קיים פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

כדי למצוא את r, a_n נציב את הפונקציה במשוואה

תרגיל. פתרו את המשוואה הבאות סביב $x_0 = 0$

1. $2xy'' + y' - y = 0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y'' + \frac{1}{2x}y' - \frac{1}{2x}y = 0$$

מכאן

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{2x} \\ q(x) = -\frac{1}{2x} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולית ב-$x_0 = 0$ כי

$$\lim_{x \to x_0} xp(x) = \frac{1}{2}$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0} x^2 q(x) = 0$$

לכן $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} 2a_{k+1} (k+1+r)(k+r) x^{k+r} + \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1} (k+1+r) x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

$$2a_0 r(-1+r) x^{-1+r} + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_{k+1}(k+1+r)(k+r) x^{k+r} + a_0 r x^{-1+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1+r) x^{k+r} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} =$$

$$\begin{cases} 2a_0 r(-1+r) x^{-1+r} + a_0 r x^{-1+r} = 0 \\ 2a_{k+1}(k+1+r)(k+r) + a_{k+1}(k+1+r) - a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_0 r(-1+r) + a_0 r = 0 \\ a_{k+1}(k+1+r)\left[2(k+r)+1\right] = a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} r(-2+2r+1) = 0 \\ a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1+r)(2k+2r+1)} \end{cases}$$

כלומר $r_{1,2} = 0, \frac{1}{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{(k+1+r)(2k+2r+1)}$$

עבור $r_1 = 0$ נקבל

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+0}$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(2n+1)}$$

עבור $r_2 = \frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$b_{n+1} = \frac{b_k}{\left(k+1+\frac{1}{2}\right)(2k+2)} = \frac{b_k}{(2k+3)(k+1)}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

.2 $2x^2y'' - xy' + (1+x)\,y = 0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1+x}{2x^2}y = 0$$

מכאן

$$\begin{cases} p(x) = -\frac{1}{2x} \\ q(x) = \frac{1+x}{2x^2} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולית ב-$x_0 = 0$ כי

$$\lim_{x\to x_0} xp(x) = -\frac{1}{2}$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0} x^2q(x) = \frac{1}{2}$$

לכן $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} = 0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} 2a_{k+1}(k+1+r)(k+r)x^{k+1+r} - \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}(k+1+r)x^{k+1+r} + \sum_{k=-1}^{\infty} a_{k+1}x^{k+1+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r+1} = 0$$

$$\begin{cases} 2a_0r(-1+r) - a_0r + a_0 = 0 \\ 2a_{k+1}(k+1+r)(k+r) - a_{k+1}(k+1+r) + a_{k+1} + a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r(-1+r) - r + 1 = 0 \\ a_{k+1}\left[2(k+1+r)(k+r) - (k+1+r) + 1\right] = -a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r(-1+r) - r + 1 = 0 \\ a_{k+1}\left[2(k+1+r)\left[(k+r)-1\right] - +1\right] = -a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r^2 - 3r + 1 = 0 \\ a_{k+1} = -\frac{a_k}{2(k+r)-2(k+1+r)+1} \end{cases}$$

כלומר $r_{1,2} = 1, \frac{1}{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{2(k+1+r)(k+r) - 2(k+1+r) + 1}$$

עבור $r_1 = 0$ נקבל

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{n+1} = -\frac{a_k}{2(k+1)k - 2(k+1) + 1}$$

עבור $r_2 = \frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n+\frac{1}{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$a_{k+1} = -\frac{a_k}{2\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right) - 2\left(k+\frac{3}{2}\right) + 1}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

3. $4xy'' + 2y' + y = 0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{4x}y = 0$$

מכאן

$$\begin{cases} p(x) = \frac{1}{2x} \\ q(x) = \frac{1}{4x} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולית ב-$x_0 = 0$כי

$$\lim_{x\to x_0} xp(x) = \frac{1}{2}$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0} x^2 q(x) = 0$$

לכן $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$4x\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(n+r)x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty} 4a_{k+1}(k+1+r)(k+r)x^{k+r} + \sum_{k=-1}^{\infty} 2a_{k+1}(k+1+r)x^{k+r} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r} = 0$$

$$\begin{cases} 4a_0 r(r-1) + 2a_0 r = 0 \\ 4a_{k+1}(k+1+r)(k+r) + 2a_{k+1}(k+1+r) + a_k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4r\left(r-1\right)+2r=0 \\ 4a_{k+1}\left(k+1+r\right)\left(k+r\right)+2a_{k+1}\left(k+1+r\right)+a_k=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r^2-r=0 \\ a_{k+1}\left[4\left(k+1+r\right)\left(k+r\right)+2\left(k+1+r\right)\right]=-a_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r^2-r=0 \\ a_{k+1}=\frac{-a_k}{4(k+1+r)(k+r)+2(k+1+r)} \end{cases}$$

כלומר $r_{1,2}=0,\frac{1}{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1}=\frac{-a_k}{4\left(k+1+r\right)\left(k+r\right)+2\left(k+1+r\right)}$$

עבור $r_1=0$ נקבל

$$y_1\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{k+1}=\frac{-a_k}{4\left(k+1\right)k+2\left(k+1\right)}$$

עבור $r_2=\frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n+\frac{1}{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$b_{k+1}=\frac{-b_k}{4\left(k+\frac{3}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)+2\left(k+\frac{3}{2}\right)}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y\left(x\right)=y_1\left(x\right)+y_2\left(x\right)$$

4. $x^2y''+xy'+\left(x-2\right)y=0$

פתרון. ראשית נביא את המשוואה לצורה רגילה

$$y''+\frac{1}{x}y'+\frac{x-2}{x^2}y=0$$

מכאן

$$\begin{cases} p\left(x\right)=\frac{1}{x} \\ q\left(x\right)=\frac{x-2}{x^2} \end{cases}$$

נשים לב שיש נקודה סינגולרית ב-$x_0=0$כי

$$\lim_{x\to x_0}xp\left(x\right)=1$$

ו-

$$\lim_{x\to x_0}x^2q\left(x\right)=-2$$

לכן $x_0=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית. נחפש פתרון מהצורה

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$$

אם נגזור ונציב במשוואה נקבל

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r-1}+(x-2)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}-2a_nx^{n+r}=0$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty}a_{k+1}(k+1+r)(k+r)x^{k+r+1}+\sum_{k=-1}^{\infty}a_{k+1}(k+1+r)x^{k+r+1}+\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+r+1}+\sum_{k=-1}^{\infty}-2a_{k+1}x^{k+r+1}=0$$

$$\begin{cases}a_0r(-1+r)+a_0r-2a_0=0\\ a_{k+1}(k+1+r)(k+r)+a_{k+1}(k+1+r)+a_k-2a_{k+1}=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}r(-1+r)+r-2=0\\ a_{k+1}\left[(k+1+r)(k+r)+(k+1+r)-2\right]=-a_k\end{cases}$$

$$\begin{cases}r^2-2=0\\ a_{k+1}=\frac{-a_k}{(k+1+r)^2-2}\end{cases}$$

כלומר $r_{1,2}=\pm\sqrt{2}$ ומתקיים הכלל

$$a_{k+1}=\frac{-a_k}{(k+1+r)^2-2}$$

עבור $r_{1,2}=\sqrt{2}$ נקבל

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+\sqrt{2}}$$

כאשר a_n מתקיים

$$a_{n+1}=\frac{-a_n}{\left(k+1+\sqrt{2}\right)^2-2}$$

עבור $r_2=\frac{1}{2}$ נקבל

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^{n-\sqrt{2}}$$

כאשר b_n מתקיים

$$b_{n+1}=\frac{-b_n}{\left(k+1-\sqrt{2}\right)^2-2}$$

והפתרון הכללי הוא

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

6.9.1 משוואת בסל

המד"ר

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$$

היא משוואת בסל מסדר ν ($\nu\geq 0$) ולה יש נקודה סינגולרית רגולרית ב-0 לכן פותרים אותה כמו בפרק הנ"ל

6.10 התמרת לפלס

הגדרה. תהי $f(t)$ פונקציה המוגדרת בקטע $0 \le t < 0$ אז התמרת לפלס שלה היא

$$\mathfrak{L}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

תרגיל. מצא את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

1. $f(t) = t$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &&= \\
&= \int_0^\infty e^{-st} t dt &&= \begin{bmatrix} u = t & dv = e^{-st} \\ du = 1 & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt &&= \\
&= 0 - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty &&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

2. $f(t) = t^2$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &&= \\
&= \int_0^\infty e^{-st} t^2 dt &&= \begin{bmatrix} u = t^2 & dv = e^{-st} \\ du = 2t & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \left[t^2\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2t\frac{e^{-st}}{-s} dt &&= \begin{bmatrix} u = t & dv = e^{-st} \\ du = 1 & v = \frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{s}\left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \frac{2}{s}\int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt &&= \frac{1}{s^2} \\
& -\frac{2}{s}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_0^\infty &&= -\frac{2}{s^2}
\end{aligned}$$

3. $f(t) = \cos at$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &=& \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\cos at dt &=& \begin{bmatrix} u=\cos at & dv=e^{-st} \\ du=-a\sin(at) & v=\frac{e^{-st}}{-s}\end{bmatrix} \\
&= \left[\cos at\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty a\sin(at)\frac{e^{-st}}{s}dt &=& \\
&= \frac{1}{s}-\frac{a}{s}\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt &=& \begin{bmatrix} u=\sin at & dv=e^{-st} \\ du=a\cos(at) & v=\frac{e^{-st}}{-s}\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s}-\frac{a}{s}\left[\left[\sin at\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty a\cos(at)\frac{e^{-st}}{-s}dt\right] &=& \\
&= \frac{1}{s}-\frac{a}{s}\left[\frac{a}{s}\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt\right] &=& \frac{1}{s}-\frac{a^2}{s^2}\mathfrak{L}(s)
\end{aligned}$$

לכן

$$\begin{gathered}
\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\mathfrak{L}(s)=\frac{1}{s} \\
\Downarrow \\
\left(1+\frac{a^2}{s^2}\right)\mathfrak{L}(s)=\frac{s}{s^2+a^2}
\end{gathered}$$

.4 $f(t)=te^{at}$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &=& \\
& \int_0^\infty e^{-st}te^{at}dt && \\
&= \int_0^\infty e^{(-s+a)t}tdt &=& \begin{bmatrix} u=t & dv=e^{(-s+a)t} \\ du=1 & v=\frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a}\end{bmatrix} \\
&= \left[t\frac{e^{-st}}{-s+a}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(-s+a)t}}{-s+a}dt &=& \\
&= 0-\left[\frac{e^{(-s+a)t}}{(-s+a)^2}\right]_0^\infty &=& \frac{1}{(-s+a)^2}
\end{aligned}$$

.5 $f(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ t & t\geq 2\end{cases}$

פתרון. פשוט נחשב את האינגרל של התמרת לפלס

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &=& \\
&= \int_2^\infty e^{-st} t dt &=& \begin{bmatrix} u=t & dv=e^{-st} \\ du=1 & v=\frac{e^{-st}}{-s} \end{bmatrix} \\
&= \left[t\frac{e^{-st}}{-s}\right]_2^\infty - \int_2^\infty \frac{e^{-st}}{-s} dt &=& \\
&= \frac{2e^{-2s}}{s} - \left[\frac{e^{-st}}{s^2}\right]_2^\infty &=& \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2}
\end{aligned}$$

משפט. התמרת לפלס של נגזרת

$$\begin{array}{lll}
f & \longrightarrow & \mathfrak{L}_f(s) \\
f' & \longrightarrow & s\mathfrak{L}_f(s) - f(0) \\
f'' & \longrightarrow & s^2\mathfrak{L}_f(s) - sf(0) - f'(0) \\
\vdots & & \\
f^{(n)} & \longrightarrow & s^n\mathfrak{L}_f(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)
\end{array}$$

ליניאריות של התמרת לפלס

$$\alpha f + \beta g \longrightarrow \alpha\mathfrak{L}_f(s) + \beta\mathfrak{L}_g(s)$$

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים בעזרת התמרת לפלס

1. $y'' + y = f(t)$ עבור $f(t) = \begin{cases} 1 & t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le t < \infty \end{cases}$ ו- $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}
y'' + y = f(t) \\
\Downarrow \\
s^2\mathfrak{L}(s) - sy(0) - y'(0) + \mathfrak{L}(s) = \mathfrak{L}_f(s) \\
\Downarrow \\
\left(s^2+1\right)\mathfrak{L}(s) + 1 = \mathfrak{L}_f(s) \\
\Downarrow \\
\mathfrak{L}(s) = \frac{\mathfrak{L}_f(s) - 1}{s^2+1}
\end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt &=& \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} dt &=& \\
&= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} &=& -\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} + \frac{1}{s} - 1}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+1)}$$

2. $y''+2y'+y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & \pi\le t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & else\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+2y'+y=f(t)\\ \Downarrow\\ \left[s^2\mathfrak{L}(s)-sy(0)-y'(0)\right]+2\left[s\mathfrak{L}(s)-y(0)\right]+\mathfrak{L}(s)=\mathfrak{L}_f(s)\\ \Downarrow\\ \left(s^2+2s-1\right)\mathfrak{L}(s)+1=\mathfrak{L}_f(s)\\ \Downarrow\\ \mathfrak{L}(s)=\frac{\mathfrak{L}_f(s)+1}{(s+1)^2}\end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt &=\\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-st}dt &=\\ &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} &= -\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+\frac{e^{-\pi s}}{s}\end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}(s)=\frac{-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s}+\frac{1}{s}+1}{s^2+1}=\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{e^{-\pi s}}{s(s+1)^2}-\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s+1)^2}$$

3. $y''+3y'+2y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<10\\ 0 & 10\le t<\infty\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered}y''+3y'+2y=f(t)\\ \Downarrow\\ \left[s^2\mathfrak{L}(s)-sy(0)-y'(0)\right]+3\left[s\mathfrak{L}(s)-y(0)\right]+2\mathfrak{L}(s)=\mathfrak{L}_f(s)\\ \Downarrow\\ \left(s^2+3s+2\right)\mathfrak{L}(s)=\mathfrak{L}_f(s)\\ \Downarrow\\ \mathfrak{L}(s)=\frac{\mathfrak{L}_f(s)}{(s+2)(s+1)}\end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt &=\\ &= \int_0^{10} e^{-st}dt &=\\ &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{10} &= -\frac{e^{-10s}}{s}+\frac{1}{s}\end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}(s)=\frac{-\frac{e^{-10s}}{s}+\frac{1}{s}}{(s+2)(s+1)}=\frac{1}{s(s+2)(s+1)}-\frac{e^{-10s}}{s(s+2)(s+1)}$$

4. $y^{(4)} - y = f(t)$ עבור $f(t) = \begin{cases} 1 & 1 \le t < 2 \\ 0 & else \end{cases}$ ו- $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0 \end{cases}$

פתרון. נפעיל התמרת לפלס על המשוואה ונקבל

$$\begin{gathered} y^{(4)} - y = f(t) \\ \Downarrow \\ \left[s^4 \mathfrak{L}(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0)\right] - \mathfrak{L}(s) = \mathfrak{L}_f(s) \\ \Downarrow \\ \left(s^4 + 1\right) \mathfrak{L}(s) = \mathfrak{L}_f(s) \\ \Downarrow \\ \mathfrak{L}(s) = \frac{\mathfrak{L}_f(s)}{s^4+1} \end{gathered}$$

כעת נחשב את התמרת לפלס של f

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_f(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt &= \\ &= \int_1^2 e^{-st} dt &= \\ &= \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_1^2 &= -\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s} \end{aligned}$$

מכאן התמרת לפלס של הפתרון הוא

$$\mathfrak{L}(s) = \frac{-\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}}{s^4+1} = \frac{e^{-s}}{s\left(s^4+1\right)} - \frac{e^{-2s}}{s\left(s^4+1\right)}$$

6.11 מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון

מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון היא מערכת מהצורה

$$\begin{cases} x_1'(t) = p_{11}(t) x_1(t) + \ldots + p_{1n}(t) x_n(t) + g_1(t) \\ x_2'(t) = p_{21}(t) x_1(t) + \ldots + p_{2n}(t) x_n(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = p_{n1}(t) x_1(t) + \ldots + p_{nn}(t) x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

ואנחנו מחפשים פונקציות $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ הפותרות את המערכת.

6.11.1 מערכות של משוואות דיפרנציאליות הומוגנית עם מקדמים קבועים

במקרה זה המערכת היא

$$\begin{cases} x_1'(t) = p_{11} x_1(t) + \ldots + p_{1n} x_n(t) \\ x_2'(t) = p_{21} x_1(t) + \ldots + p_{2n} x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = p_{n1} x_1(t) + \ldots + p_{nn} x_n(t) \end{cases}$$

ואז אפשר להציג את המערכת כך $X'(t) = AX(t)$ כשאר

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

ו-

$$A=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

ל-A נמצא הערכים עצמים ווקטורים עצמים ואז הפתרון הכללי הוא

$$X(t)=C_1v_1e^{\lambda_1 t}+C_2v_2e^{\lambda_2 t}++C_nv_ne^{\lambda_n t}$$

תרגיל. פתרו את המערכות המשוואות הבאות

1. $\begin{cases} x_1'=3x_1-2x_2 \\ x_2'=2x_1-2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 \\ -2 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-3)(\lambda+2)+4=(\lambda-2)(\lambda+1)$$

העע הם $\lambda=2,-1$נמצא ו״ע

- $\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda=-1$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}+C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}e^{-t}$$

2. $\begin{cases} x_1'=x_1-2x_2 \\ x_2'=3x_1-4x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 1)(\lambda + 4) + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)$$

הע״ע הם $\lambda = -2, -1$ נמצא ו״ע

- $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

.3 $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -3 & \lambda + 2 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 2)(\lambda + 2) + 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

הע״ע הם $\lambda = 1, -1$ נמצא ו״ע

- $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right) = C_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right) e^{-t} + C_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) e^{t}$$

.4 $\left\{\begin{array}{c} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{array}\right.$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right)' = \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right)$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{array}\right)$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\left(\begin{array}{cc} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{array}\right)\right| = (\lambda - 1)(\lambda + 2) - 4 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

הער הם $\lambda = 2, -3$ נמצא ו״ע

- $\lambda = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)$$

- $\lambda = -3$:

$$\left(\begin{array}{cc} -4 & -1 \\ -4 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array}\right)$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right) = C_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right) e^{2t} + C_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ -4 \end{array}\right) e^{-3t}$$

.5 $\left\{\begin{array}{c} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{array}\right.$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right)' = \left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1(t) \\ x_2(t) \end{array}\right)$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\left(\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right)$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\left(\begin{array}{cc} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{array}\right)\right| = (\lambda + 2)(\lambda + 2) - 1 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)$$

הער הם $\lambda = -1, -3$ נמצא ו״ע

• $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t}$$

6. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |\lambda I - A| = \\ &= \left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & -1 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = \\ &= (\lambda-1)\left[(\lambda-2)(\lambda-1)-1\right] + \left[-(\lambda-1)-2\right] - 2\left[1+2(\lambda-2)\right] = \\ &= (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+1\right] + \left[-\lambda-1\right] - 2\left[2\lambda-3\right] = \\ &= (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+1\right] + -5\lambda+5 = \\ &= (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda+1-5\right] = \\ &\quad (\lambda-1)\left[\lambda^2-3\lambda-4\right] = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+1) \end{aligned}$$

הע״ע הם $\lambda = 1, 4, -1$ נמצא ו״ע

- $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = 4$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

במידה ויש ע״ע מרוכבים $\lambda \pm \mu i$ עם ו״ע v_1, v_2 בוחרים את הע״ע עם הסימן + והוע המתקים לו ומחשבים

$$ve^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) = u(x) + iv(x)$$

ואז $u(t), v(t)$הם פתרונות הבסיס.

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים

1. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 8 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

העע הם $\lambda = 1 \pm 2i$נמצא ו״ע

- $\lambda = 1 + 2i$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (1+2i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 3v_1 - 2v_2 = (1+2i)\, v_1 \\ 4v_1 - v_2 = (1+2i)\, v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$(2-2i)\, v_1 - 2v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^t \left(\cos(2t) + i \sin(2t)\right) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) + i\sin(2t) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) - i\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - \cos(2t) \end{pmatrix}$$

.2 $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda+1 & 4 \\ -1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda+1)(\lambda+1) + 4 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

העע הם $\lambda = -1 \pm 2i$ נמצא ו״ע

- $\lambda = -1 + 2i$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-1+2i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} -v_1 - 4v_2 = (-1+2i)\, v_1 \\ v_1 - v_2 = (-1+2i)\, v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 = 2iv_2$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)=e^{-t}\begin{pmatrix} 2i\cos(2t)-2\sin(2t) \\ \cos(2t)+i\sin(2t) \end{pmatrix}=e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}+ie^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=C_1e^{-t}\begin{pmatrix} -2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

.3
$$\begin{cases} x_1'=2x_1-5x_2 \\ x_2'=x_1-2x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix} \lambda-2 & 5 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix}\right|=(\lambda-2)(\lambda+2)+5=\lambda^2+1$$

הע״ע הם $\lambda=\pm i$ נמצא ו״ע

- $\lambda=i$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=i\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 2v_1-5v_2=iv_1 \\ v_1-2v_2=iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1=(2+i)\,v_2$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2+i \\ 1 \end{pmatrix}\left(\cos(2t)+i\sin(2t)\right)=\begin{pmatrix} 2\cos(2t)+2i\sin(2t)+i\cos(2t)-\sin(2t) \\ \cos(2t)+i\sin(2t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cos(2t)-\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}'=C_1\begin{pmatrix} 2\cos(2t)-\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 2\sin(2t)+\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

.4
$$\begin{cases} x_1'=x_1-x_2 \\ x_2'=5x_1-3x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -5 & \lambda + 3 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)(\lambda+3)+5 = \lambda^2+2\lambda+2$$

העע הם $\lambda = -1 \pm i$ נמצא ו״ע

- $\lambda = -1 + i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (-1+i) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1 - v_2 = (-1+i)\, v_1 \\ 5v_1 - 3v_2 = -1 + iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_2 = (2-i)\, v_1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t}(\cos(t) + i\sin(t)) = \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ 2\cos(t) + 2i\sin(t) - i\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 2\sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

.5 $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -5x_1 - x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 5 & \lambda + 1 \end{pmatrix}\right| = (\lambda-1)(\lambda+1) + 10 = \lambda^2 + 9$$

העע הם $\lambda = \pm 3i$ נמצא ו״ע

- $\lambda = 3i$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 3i \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 3iv_1 \\ -5v_1 - v_2 = 3iv_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_2 = \left(\tfrac{-1+3i}{2}\right) v_1$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1+3i \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1+3i \end{pmatrix} (\cos(3t) + i\sin(3t)) = \begin{pmatrix} 2\cos(3t) + 2i\sin(3t) \\ -\cos(t) - i\sin(t) + 3i\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ -\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos(3t) \\ -\cos(t) - 3\sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin(3t) \\ -\sin(t) + 3\cos(t) \end{pmatrix}$$

במידה והע״ע זההים אז מוצאים את הו״ע במידה והם בת״ל יש להתייחס אליהם כע״ע שונים במידה ויש ו״ע אחד נעשה את הדבר הבא

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים

1. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -1 & \lambda + 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 3)(\lambda + 1) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

העע הם $\lambda = 1$נמצא ו״ע

- $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} 3v_1 - 4v_2 = v_1 \\ v_1 - v_2 = v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 - 2v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכופתרון אחד הוא

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^t$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} 2e^t + 2te^t + v_1e^t = 3\left(2te^t + v_1e^t\right) - 4\left(te^t + v_2e^t\right) \\ e^t + te^t + v_2e^t = \left(2te^t + v_1e^t\right) - \left(te^t + v_2e^t\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2t + v_1 = 3\left(2t + v_1\right) - 4\left(t + v_2\right) \\ 1 + t + v_2 = \left(2t + v_1\right) - \left(t + v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = 2v_1 - 4v_2 \\ 1 = v_1 - 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

.2 $\begin{cases} x_1' = -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{4} & \lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right| = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$

הע״ע הם $\lambda = -1$ נמצא ו״ע

- $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}v_1 + v_2 = -v_1 \\ -\frac{1}{4}v_1 - \frac{1}{2}v_2 = -v_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$-v_1 + 2v_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} 2e^{-t} - 2te^{-t} - v_1 e^{-t} = -\frac{3}{2}\left(2te^{-t} + v_1 e^{-t}\right) + \left(te^{-t} + v_2 e^{-t}\right) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2 e^{-t} = -\frac{1}{4}\left(2te^{-t} + v_1 e^{-t}\right) - \frac{1}{2}\left(te^{-t} + v_2 e^{-t}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2t - v_1 = -\frac{3}{2}\left(2t + v_1\right) + \left(t + v_1\right) \\ 1 - t - v_2 = -\frac{1}{4}\left(2t + v_1\right) - \frac{1}{2}\left(t + v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = -v_1 + 2v_2 \\ 4 = -v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -4 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} te^{t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}\right]$$

.3

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -8 & \lambda + 4 \end{pmatrix}\right| = (\lambda - 4)(\lambda + 4) + 16 = \lambda^2$$

הע״ע הם $\lambda = 0$נמצא ו״ע

- $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} 4v_1 - 2v_2 = 0 \\ 8v_1 - 4v_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$2v_1 - v_2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכןפתרון אחד הוא

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{0t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} 1 = 4(t+v_1) - 2(2t+v_2) \\ 2 = 8(t+v_1) - 4(2t+v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 4v_1 - 2v_2 \\ 2 = 8v_1 - 4v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{4} \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

4. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$ עם תנאי התחלה $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ -4 & \lambda + 7 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)(\lambda + 7) + 16 = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

העע הם $\lambda = -3$נמצא ו״ע

- $\lambda = -3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} v_1 - 4v_2 = -3v_1 \\ 4v_1 - 7v_2 = -3v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$v_1 - v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן פתרון אחד הוא

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-3t}$$

את הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}e^{-3t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases}e^{-3t}-3te^{-3t}-3v_1e^{-3t}=\left(te^{-3t}+v_1e^{-3t}\right)-4\left(te^{-3t}+v_2e^{-3t}\right)\\e^{-3t}-3te^{-3t}-3v_2e^{-3t}=4\left(te^{-3t}+v_1e^{-3t}\right)-7\left(te^{-3t}+v_2e^{-3t}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-3t-3v_1=(t+v_1)-4(t+v_2)\\1-3t-3v_2=4(t+v_1)-7(t+v_2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}1=4v_1-4v_2\\1=4v_1-4v_2\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_1=\frac{1}{4}\\v_2=0\end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-3t}+C_2\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{-3t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}e^{-3t}\right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$$

$$C_1=2$$
$$C_2=4$$

לכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{t}+4\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^{t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}e^{t}\right]=\begin{pmatrix}3+4t\\2+4t\end{pmatrix}e^{-3t}$$

5. $\begin{cases}x_1'=-\frac{5}{2}x_1+\frac{3}{2}x_2\\x_2'=-\frac{3}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\end{cases}$ עם תנאי התחלה $\begin{cases}x_1(0)=3\\x_2(0)=-1\end{cases}$

פתרון. ראשית נהפוך את המערכת לצורת מטריצה

$$\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$$

כעת יש למצוא ע״ע ו״ע למטריצה $\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}$. הפולינום האופייני הוא

$$p_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\left|\begin{pmatrix}\lambda+\frac{5}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}&\lambda-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|=\left(\lambda+\frac{5}{2}\right)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}=\lambda^2+2\lambda+1$$

הען הם $\lambda=-1$ נמצא ו״ע

• $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{cases} -5v_1 + 3v_2 = -2v_1 \\ -3v_1 + v_2 = -2v_2 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$-3v_1 + 3v_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכןפתרון אחד הוא אתc הפתרון השני נחפש מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

נציב זאת המדר ונקבל

$$\begin{cases} e^{-t} - te^{-t} - v_1e^{-t} = -\frac{5}{2}\left(te^{-t} + v_1e^{-t}\right) + \frac{3}{2}\left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \\ e^{-t} - te^{-t} - v_2e^{-t} = -\frac{3}{2}\left(te^{-t} + v_1e^{-t}\right) + \frac{1}{2}\left(te^{-t} + v_2e^{-t}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 - 2t - 2v_1 = -5\left(t + v_1\right) + 3\left(t + v_2\right) \\ 2 - 2t - 2v_2 = -3\left(t + v_1\right) + \left(t + v_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = -3v_1 + 3v_2 \\ 2 = -3v_1 + 3v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = -\frac{2}{3} \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון שני הוא מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

מכאן הפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}\right]$$

כעת נציב את תנאי התחלה ונקבל

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = -1$$
$$C_2 = -6$$

לכן הפתרון הוא

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - 6\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}\right] = \begin{pmatrix} 3 - 6t \\ -1 - 6t \end{pmatrix} e^{-t}$$

משוואה החום

הסבר

משוואת הגלים

הסבר