פתרון תרגיל 2 – מבוא לאנליזה 1

1. (א) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ מתכנסת ל-$\frac{2}{3}$:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \frac{1}{3\varepsilon} \rceil + 1 \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$\left| a_n - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2n+(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| = \left| \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{3n} - \frac{2}{3} \right| =$$

$$= \left| \frac{(-1)^n}{3n} \right| = \frac{1}{3n} \leq \frac{1}{3n_0} < \frac{1}{3\lceil \frac{1}{3\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ב) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{5n}{n^2+3n+1}$ מתכנסת ל-0:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n - 0| = |a_n| = \frac{5n}{n^2+3n+1} < \frac{5n}{n^2} =$$

$$= \frac{5}{n} \leq \frac{5}{n_0} = \frac{5}{\lceil \frac{5}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{5}{\frac{5}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ג) נוכיח כי הסדרה $a_n = \frac{n^2-1}{n^2+1}$ מתכנסת ל-1:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = \lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \rceil \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n^2-1}{n^2+1} - 1 \right| = \left| \frac{n^2-1-(n^2+1)}{n^2+1} \right| = \frac{2}{n^2+1} <$$

$$< \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n_0^2} = \frac{2}{\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \rceil^2} \leq \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right)^2} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

(ד) נוכיח כי הסדרה $a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n^2} & n \ odd \\ 1 - \frac{1}{n} & n \ even \end{cases}$ מתכנסת ל-1:

בהינתן $\varepsilon > 0$, ניקח $n_0 = max\{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil, \lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rceil\} + 1 \in \mathbb{N}$, ואז לכל $n \geq n_0$ טבעי יתקיים: $|a_n - 1| < \varepsilon$.

אכן, אם $n \geq n_0$ זוגי:

$$|a_n - 1| = \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

ואם $n \geq n_0$ אי־זוגי:

$$|a_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n^2} - 1\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0^2} < \frac{1}{\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rceil^2} \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

2. (א) נניח בשלילה שהסדרה $a_n = 3 + (-1)^n$ מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon = 1$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n - L| < 1$. בפרט,

$$2n_0 > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{2n_0} - L| = \left|\; 3 + (-1)^{2n_0} - L \;\right| =$$

$$= |\; 3 + 1 - L \;| = |4 - L| < 1$$

כלומר $-1 < 4 - L < 1 \;\Leftarrow\; \underline{3 < L < 5}$. כמו כן,

$$2n_0 + 1 > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{2n_0+1} - L| = \left|\; 3 + (-1)^{2n_0+1} - L \;\right| =$$

$$= |\; 3 - 1 - L \;| = |2 - L| < 1$$

כלומר $-1 < 2 - L < 1 \;\Leftarrow\; \underline{1 < L < 3}$, וקיבלנו סתירה.

(ב) נניח בשלילה שהסדרה $a_n = 3 + cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ מתכנסת לגבול $L \in \mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n - L| < \frac{1}{2}$. בפרט,

$$4n_0 > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{4n_0} - L| = \left|\; 3 + cos\left(\frac{\pi \cdot 4n_0}{2}\right) - L \;\right| =$$

$$= |\; 3 + cos(2\pi \cdot n_0) - L \;| = |3 + 1 - L| = |4 - L| < \frac{1}{2}$$

כלומר $-\frac{1}{2} < 4 - L < \frac{1}{2} \;\Leftarrow\; \underline{3\frac{1}{2} < L < 4\frac{1}{2}}$. כמו כן,

$$2n_0 + 1 > n_0 \;\Rightarrow\; |a_{2n_0+1} - L| = \left|\; 3 + cos\left(\frac{\pi \cdot (2n_0 + 1)}{2}\right) - L \;\right| =$$

$$= \left|\; 3 + cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n_0\right) - L \;\right| = |3 + 0 - L| = |3 - L| < \frac{1}{2}$$

כלומר $-\frac{1}{2} < 3 - L < \frac{1}{2} \;\Leftarrow\; \underline{2\frac{1}{2} < L < 3\frac{1}{2}}$, וקיבלנו סתירה.

(ג) נניח בשלילה שהסדרה $a_n=\sqrt{n+1}$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon=1$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n-L|<1$. נשים לב:

$$|a_n-L|<1 \ \Rightarrow\ |\sqrt{n+1}-L|<1 \ \Rightarrow\ -1<\sqrt{n+1}-L<1$$

בפרט, $0<\sqrt{n+1}<L+1$, ואם נעלה בריבוע: $n+1<(L+1)^2=L^2+2L+1$, ז"א $n<L^2+2L$. נובע שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $\boldsymbol{n<L^2+2L}$. אבל $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל ולכן יש $n_1\in\mathbb{N}$ המקיים $n_1>max\{n_0,\ L^2+2L\}$, ז"א $n_1\geq n_0$ ומקיים $\boldsymbol{n_1>L^2+2L}$, וקיבלנו סתירה.

3. (א) **הפרכה:** הסדרה $a_n=10+\dfrac{1}{n}$ מקיימת $a_n>10$ לכל $n\in\mathbb{N}$, אבל מתכנסת לגבול $L=10$:
אכן, בהינתן $\varepsilon>0$, ניקח $n_0=\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\rceil+1\in\mathbb{N}$, ואז לכל $n\geq n_0$ טבעי מתקיים:

$$|a_n-10|=\left|10+\frac{1}{n}-10\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}<\frac{1}{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil}\leq\frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

(ב) **הוכחה:** יהי $\varepsilon>0$ כלשהו. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L\in\mathbb{R}$, לכן קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$. לפי אי־שוויון המשולש ההפוך (אותו נתבקשתם להוכיח בתרגיל הבית הקודם) מתקיים: $||a_n|-|L||\leq|a_n-L|$. בסה"כ לכל $n\geq n_0$ טבעי מתקיים: $||a_n|-|L||\leq|a_n-L|<\varepsilon$. לכן $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|L|$.

(ג) **הפרכה:** הסדרה $a_n=(-1)^n$ מקיימת $a_n^2=(-1)^{2n}=1$, לכן $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=1$, אולם $\{a_n\}$ כלל לא מתכנסת: נניח בשלילה שהיא מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$. אזי בפרט עבור $\varepsilon=1$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ טבעי מתקיים: $|a_n-L|<1$. מצד אחד, אם ניקח $n>n_0$ זוגי נקבל: $|a_n-L|=|(-1)^n-L|=|1-L|<1$, כלומר $-1<1-L<1$, ז"א $\underline{0<L<2}$. מצד שני, אם ניקח $n>n_0$ אי־זוגי נקבל: $|a_n-L|=|(-1)^n-L|=|-1-L|=|1+L|<1$, כלומר $-1<L+1<1$, ז"א $\underline{-2<L<0}$, וקיבלנו סתירה.

(ד) **הוכחה:** בתרגול הוכחנו שאם $\{b_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L>0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{b_n}=\sqrt{L}$ (נעיר שלמעשה זה נכון גם אם $\{b_n\}$ אי־שלילית ו־$L\geq 0$). נתון שהסדרה $\{a_n\}$ חיובית, לכן גם הסדרה $\{a_n^2\}$ חיובית, ונתון $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2=L>0$. אז לפי הטענה מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n^2}=\sqrt{L}$. אבל $\sqrt{a_n^2}=|a_n|=a_n$ (שכן $a_n>0$) ונקבל $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{L}$, כדרוש.