

תרגיל 7 אינפי 1 מדמ"ח

1. תהי סדרה המקיימת $|a_n - a_{n-1}| < \frac{1}{2^n}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי a_n היא סדרת קושי, ולכן מתכנסת.

רמז: רשמו

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + \dots + a_{n+2} - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n|$$

והשתמשו באי שיוון המשולש.

2. יהיו $0 < a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ו $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ סדרות.

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = 0$.

3. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-2} \right)^{n^2}$

(ב) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2-2} \right)^{3n}$

(ג) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+a}{n-a} \right)^n$ כאשר $a \in \mathbb{R}$

(ד) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+4}{n^2+n+1} \right)^{3n+2}$

4. קבעו את התכנסות / התבדרות הטורים הבאים. עבור הטורים המתכנסים, חשבו את

סכומם.

(א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{3n^2-5}}$

(ג) $\sum_{n=3}^{\infty} -\frac{8 \cdot (-9)^n}{13^n}$

5. הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $\sum a_n$ טור מתכנס אזי $\sum \frac{1}{a_n}$ טור מתבדר.

(ב) אם $\sum a_n$ טור מתבדר אזי $\sum \frac{1}{a_n}$ טור מתכנס.