מבוא לחוגים ומודולים – שיעורי בית 1

לירז כתיב ואיתי מועלם

שאלה 1.

נבדוק אלו תכונות נשמרות תחת תת־חוגים. יהי R חוג בלי יחידה ,ויהי $S \subseteq R$ תת חוג בלי יחידה.
הוכיחו או הפריכו :

א. אם R עם יחידה, האם S עם יחידה? ולהפך ?

ב. אם R חילופי, האם S חילופי? ולהפך

ג. אם R תחום, האם S תחום? ולהפך ?

ד. אם איבר x הפיך בR האם הוא הפיך ב S?ולהפך ?

פתרון.

א. הפרכה, ניקח את $\mathrm{R} = \mathbb{Z}$ חוג. $\mathrm{S} = 2\mathbb{Z}$ הוא אידיאל שלו בפרט הוא חוג בלי יחידה.

להיפך הפרכה, נסתכל על חוג האפס וחוג R כלשהו בלי יחידה שאינו חוג.

ב. הוכחה ,יהיו $a, b \in S$. $\mathrm{S} \subseteq R$ לכן $a, b \in S$ כיוון שR חילופי מתקיים $a \cdot b = b \cdot a$ לכל $a, b \in S$ שבפרט בR.לכן S חילופי.

להיפך הפרכה, ניקח את $\mathrm{S} = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\}$ כאשר $\mathrm{R} = \mathrm{M}_{2x2}$

ג. הפרכה, $\mathrm{R} = \mathbb{Z}$ תחום שלמות ובפרט תחום. $\mathrm{R} = 2\mathbb{Z}$ לא חוג ולכן לא תחום.

להיפך, $S = \left\{\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} \mid a_1 \in \mathbb{R}\right\}$ כל המטריצות הסקלריות הפיכות (פרט למטריצת האפס) לכן אין מחלקי אפס ולכן זה תחום אבל כאשר נבחר את $\mathrm{R} = \mathrm{M}_{2x2}$ נקבל הפרכה כי R אינו תחום.

ד. הפרכה, $\mathrm{R} = \mathbb{Q}$. $\mathrm{S} = \mathbb{Z}$.

2 הפיך ב$\mathbb{Q}$ אך אין לו הופכי ב$\mathbb{Z}$.

להיפך, גם הפרכה נבחר את $\mathrm{R} = M_{2x2}(\mathbb{Z}_2)$ ואת $S = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה 2

יהיו R, S חוגים בלי יחידה. נגדיר את המכפלה הישרה $R \times S$ עם הפעולות רכיב רכיב .

1.הוכיחו כי $R \times S$ חוג בלי יחידה ,ושאם R, S הם חוגים (עם יחידה),אז גם $R \times S$.

2.הגדירו את המכפלה $\prod_{i \in I} R_i$ למשפחה $\{R_i\}_{i\in I}$ של חוגים בלי יחידה, והוכיחו שאם R_i חילופי לכל,$i \in I$ אז גם $\prod_{i \in I} R_i$ חילופי.

פיתרון.

1.

נוכיח כי זה חוג בלי יחידה.

א. נראה כי $(R \times S, +, 0_{R\times S})$ חבורה אבלית.
מתורת החבורות אנו יודעים שמכפלה קרטזית של חבורות עם פעולת רכיב רכיב ביא חבורה והאבליות נשמרת. לכן החבורה $R \times S$ ביחס לפעולת החיבור ואיבר האפס $(0_R, 0_S)$ היא חבורה אבלית.

ב. נראה כי היא $(R \times S, \cdot_{R\times S})$ חבורה למחצה. זוהי אכן חבורה למחצה שהרי לכל: $r, r' \in R$ $s, s' \in S$.
$(r, s) \cdot (r', s') = (r \cdot r', s \cdot s') \in R \times S$

במידה ו R, S הם חוגים (עם יחידה) יש איברים 1_S,1_R ומכן נובע כי היחידה של $R \times S$ היא $1_{R\times S}$ ומתקיים

$$(r, s) \cdot (1_R, 1_S) = (r \cdot 1_R, s \cdot 1_S) = (r, s) = (1_R \cdot r, 1_S \cdot s) = (1_R, 1_S) \cdot (r, s)$$

2. תהי משפחה $\{R_i\}_{i\in I}$ של חוגים בלי יחידה.

נגדיר את המכפלה הקרטזית $\prod_{i \in I} R_i$ על ידי: כל הפונקציות $f: I \to \bigcup_{i\in I} R_i$ כאשר $f(i) \in R_i$.

הגדרת הכפל תתבצע באופן הבא:$f \cdot s = g: I \to \bigcup_{i\in I} R_i$ כך $(f \cdot s)(i) = g(i) = f(i) \cdot s(i)$.

אם R_i חילופי לכל $i \in I$,אז גם $\prod_{i \in I} R_i$ חילופי. יהיו $f, s \in \prod_{i \in I} R_i$,

$$(f \cdot s)(i) = f(i) \cdot s(i) = s(i) \cdot f(i) = (s \cdot f)(i)$$

שאלה 3. יהי Rחוג חילופי,ויהיו $x,y\in R$. הוכיחו שאם xy הפיך, אז גם x וגם y הפיכים.

הפריכו זאת במקרה הלא חילופי.

פתרון:

יהי Rחוג חילופי ו־$x,y\in R$ כמו בנתונים.

xy הפיך ולכן קיים $z\in R$ כך ש $(xy)z=z(xy)=1$ לכן מהקומוטטיביות נובע כי:

$x(yz)=(yz)x=1$ וכן $(zx)y=y(zx)=1$ ולכן $x^{-1}=yz$ ו $y^{-1}=xz$ ולכן בפרט הם הפיכים.

נראה שהטענה נכשלת בחוגים כללים.

נתבונן R חוג האנדומורפיזמים (שאכן חוג לפי שאלה 5) של $[x]$ אוסף הפולינומים ממשיים (כחבורה חיבורית) ונתבונן ב $D,T\in R$ כאשר Dאופרטור הגזירה (שלינארי ולכן אנדומורפיזם) ו־T אופרטור האניטגרציה המוגדר כך.

$T[p](x)=\int_0^x p(t)dt$.

מהמשפט היסודי של החדו"א מתקיים:

$\forall p\in[x]:DT[p]=p=Id[p]$

לכן $DT=1_R$ ולכן בפרט הפיך.

אבל D אינו חד חד ערכי (נגזרת של קבוע היא אפס) וTאינו על (כי אינטגרל של כל פולינום לא יתן את 1) ולכן הם אינם הפיכים (בנוסף הם הם היו הפיכים אז מיחידות ההופכי נקבל $D=T^{-1}$ אבל $TD[1]=0\neq 1$.)

מה שמשלים את הדוגמה.

■

שאלה 4.

יהי R תחום. הוכיחו $\mathrm{R}^{\mathrm{x}} = (\mathrm{R}[\mathrm{x}])^{\mathrm{x}}$,כלומר לא מקבלים איברים הפיכים "חדשים" בחוג הפולינומים.

פתרון.

נראה הכלה בכיוון $\supseteq$:

נניח $a \in R^{\times}$ כלומר קיים $a' \in R$ כך ש $a \cdot a' = a' \cdot a = 1$. (נעיר כי $a' \in R^{\times}$ גם כן)

אפשר להסתכל על $a' \in R[x]$ כפולינום, ולכן נקבל כי $a \in (\mathrm{R}[\mathrm{x}])^{\mathrm{x}}$.

כעת נראה הכלה בכיוון $\subseteq$:

יהי פולינום הפיך ממעלה k

$$a(x) = \sum_{n=1}^{k} b_n x^n \in (\mathrm{R}[\mathrm{x}])^{\mathrm{x}}$$

לפי הנתון קיים לו פולינום הופכי ממעלה m

$$b(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n x^n$$

נסתכל על מכפלתם (נעיר כי המקדם של האיבר ה$m + k$ אינו מתאפס מהגדרת הפולינומים ומכך שהמקדמים באים מחוג שלמות)

$$b(x) \cdot a(x) = \sum_{n=1}^{k+m} C_n x^n = 1$$

ולכן הדרך היחידה לקבל 1 זה אם $m + k = 0$, אבל m, k אי שליליים לכן נקבל $m = k = 0$.

סך הכל קיבלנו כי $b(x) = b, a(x) = a$ פולינומים קבועים המקיימים

$b(x) \cdot a(x) = b \cdot a = 1$ ולכן $a(x) \in R^{\times}$ כנדרש.

שאלה 5.

הוכיחו או הפריכו האם האובייקטים הבאים הם חוגים. במקרה שהם כן, האם הם תחומים?

1. $R = \left\{ \frac{m}{2n+1} \middle| m, n \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.
2. $R = \left\{ \frac{2n+1}{m} \middle| n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$ עם חיבור וכפל רגילים.

פתרון.

1. עבור $m = 0$ נקבל כי $0 \in R$.ועבור $m = n = -1$ נקבל כי $1 \in R$.
נראה כי יש סגירות לכפל ולחיבור

עבור חיבור:

$$\frac{m}{2n+1} + \frac{k}{2l+1} = \frac{m(2l+1) + k(2n+1)}{(2n+1)(2l+1)} = \frac{m(2l+1) + k(2n+1)}{(2n+1)(2l+1)}$$
$$= \frac{2(ml+kn) + m + k}{2(2nl+n+l)+1)} = \frac{a}{2b+1} \in \mathrm{R}$$

עבור כפל:

$$\frac{m}{2n+1} * \frac{k}{2l+1} = \frac{mk}{2(2nl+n+l)+1} = \frac{a}{2b+1} \in \mathrm{R}$$

סך הכל קיבלנו חוג עם יחידה. בגלל הקומוטטיביות של $\mathbb{Q}$ החוג קומוטטיבי. וכן $\mathbb{Q}$ הוא שדה ולכן R הוא תחום, ואפילו תחום שלמות .אך עדיין הוא לא חוג עם חילוק מפני ש$2 \in \mathrm{R}$ אבל $\frac{1}{2} \notin \mathrm{R}$.

2.נשים לב ש R לא מכיל את איבר האפס ולכן אינו יכול להיות תת חבורה חיבורית של $\mathbb{Q}$.
ולכן אינו תת חוג.

ג. $R=(End(G),+,\circ)$ כאשר $(G,+,0)$חבורה אבלית, $End(G)$ הוא אוסף האנדומורפיזמים של G (הומומורפיזמים מ־G לעצמה), הפעולה $+$ ב־R היא חיבור פונקציות המושרה מהפעולה של G והפעולה $\circ$ היא הרכבה.

פתרון:

הוכחה:

נוכיח שהמבנה מקיים את כל האקסיומות.

סגירות לחיבור ־ יהיו $f,g\in End(G)$ אנדומורפיזמים של G. נראה ש־$f+g$ הוא אנדומורפיזם. מתקיים: $(f+g)(a+b)=f(a+b)+g(a+b)=$ $f(a)+f(b)+g(a)+g(b)=f(a)+g(a)+f(b)+g(b)=(f+g)(a)+(f+g)(b)$

$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=0+0=0$

לכן $f+g$ הוא אנדומורפיזם.

איבר האפס ־נקח את אנדומוריפיזם האפס (שנסמן כ־0) מתקיים $(f+0)(x)=f(x)+0(x)=f(x)+0=f(x)$

אסוציאטיביות החיבור־יהיו $f,g,h\in End(G)$ אז לכל $x\in G$ מתקיים:

$((f+g)+h)(x)=(f+g)(x)+h(x)=f(x)+g(x)+h(x)=f(x)+(g+h)(x)=(f+(g+h))(x)$ לכן $(f+g)+h\equiv f+(g+h)$

איבר נגדי־יהי $f\in End(G)$ נגדיר $(-f)(x)=-(f(x))$ לכן לכל $x\in G$:

$(f+(-f))(x)=f(x)-f(x)=0=0(x)$:

לכן $f+(-f)\equiv 0$

סגירות לכפל־הרכבה של אנדומורפיזמים הינו אנדומורפיזם (תוצאה שראיתם בקורס בתורת החבורות)

אסוציאטיביות הכפל־הרכבה הינה אסוציאטיבית (תוצאה שראיתם בקורס בדידה)

איבר יחידה־ניקח $1:\equiv Id_G\in End(G)$ אנדומורפיזם הזהות (העתקה הזהות) אכן מתקיים שלכל $f\in End(G)$: $f\circ Id_G=Id_G\circ f=f$

דיסטריביוטיביות־ יהיו $f,g,h\in End(G)$ אזי לכל $x\in G$ מתקיים:

$h\circ(f+g)(x)=h((f+g)(x))=h(f(x)+g(x))=h(f(x))+h(g(x))=(h\circ f)(x)+(h\circ g)(x)=(h\circ f+h\circ g)(x)$

וגם־ $((f+g)\circ h)(x)=(f+g)(h(x))=f(h(x))+g(h(x))=((f\circ h)(x)+(g\circ h)(x))=(f\circ h+g\circ h)(x)$

לכן כלל הפילוג מתקיים ומסיים את ההוכחה.

זה אינו תחום כי עבור $G=^2$ מתקיים כי יש איברים נילפוטנטים (למשל העתקה $f(x,y)=(0,x)$ שהינה לינארית ולכן אנדומורפים היא נילפוטנטית שכן $(f\circ f)(x,y)=f(f(x,y))=f(0,x)=(0,0)$ לכל $(x,y)\in^2$)

ד. $R=(C[0,1],+,\circ)$ כאשר $C[0,1]$ הוא אוסף הפונקציות הרציפות הממשיות בקטע $[0,1]$, הפעולה $+$ היא חיבור פונקציות והפעולה $\circ$היא הרכבה.

פתרון:

הפרכה:נראה כי אין דיסטיברוטיביות, ניקח את הפונקציה $f(x)=x^2$ ואת הפונקציה $g(x)=x$ בקטע היחידה.

בשביל להפריך שוויון מספיק נקודה אחת,נבחר $x=\frac{1}{2}$

מתקיים: $(f\circ(g+g))(\frac{1}{2})=f(2g(\frac{1}{2}))=f(\frac{2}{2})=f(1)=1$

לעומת זאת $f(g(\frac{1}{2}))+f(g(\frac{1}{2}))=2f(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}\neq 1$ ולכן זה אינו חוג.

ה. $R=(C[0,1],+,\cdot)$ כאשר הפעולה $\cdot$ היא כפל פונקציות, כלומר $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$

פתרון:

הוכחה, נראה לפי האקסיומות:

א. החיבור הינו חבורה אבלית־ אוסף הפונקציות מקבוצה X כללית לממשיים הינו מרחב וקטורי ובפרט חבורה אבלית (איזומורפי למכפלה ישרה של עותקים עם עצמו כאשר הוא מאונדקס על ידי אברי X)

במקרה שלנו אנחנו יודעים שפונקציות רציפות סגורות לחיבור וכפל בסקלר ולכן R הינו תת מרחב של מרחב הפונקציות על הקטע ולכן בפרט חבורה אבלית.

ב. כפל הוא מונואיד־מקורס אינפי אנו יודעים שכפל איבר איבר של רציפות הינו רציף ולכן מוגדרת היטב, המבנה קומוטטיבי וכן אסוציאטיביות נובעת מכך שכפל איבר איבר הינו אסוציטיבי (כי עבור כל איבר זה כפל בחוג הממשים ולכן אסוציאטיבי וקומוטטיבי) ולכן נותר רק להראות ש $f(x)\equiv 1$

הוא איבר היחידה (מספיק מצד אחד כתוצאה מהחילופיות), זה נובע מכך שלכל $g\in R$ מתקיים שלכל $x\in C[0,1]$: $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=$ $1\cdot g(x)=g(x)$.

ג. דיסטריביוטיביות־ יהיו $f,g,h\in R$ אז לכל $x\in[0,1]$ מתקיים $(h\cdot(f+g))(x)=h(x)(f+g)(x)=h(x)(f(x)+g(x))=$ $h(x)f(x)+h(x)g(x)=(h\cdot f)(x)+(h\cdot g)(x)$ והדיסטריביוטיות מהכיוון השני נובעת מהחילופיות.

הראנו שזה חוג. נותר להראות שזה אינו תחום.

יהיו $f,g\in R$ מוגדרות כך:

$f(x)=\begin{cases}4x & x\in[0,\frac{1}{4}]\\ 2-4x & x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]\\ 0 & else\end{cases}$ הפונקציה רציפה כי ניתן לחלק אותה לפונקציות לינאריות (ולכן רציפות) על תתי קטעים סגורים כך שבחיתוך הקטעים הפונקציות מסכימות קריטריון לרציפות מטופולוגיה מאפשר להסיק רציפות רק מרציפות של הפונקציה בחלוקה (לא בהכרח זרה) של המרחב לקבוצות סגורות. באופן דומה נגדיר: $g(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,\frac{1}{2})\\ f(x-\frac{1}{2}) & x\in[\frac{1}{2},1]\end{cases}$ הפונקציה הזאת גם לינארית למקוטעין ורציפה כמו f

אך מתקיים $0=\begin{cases}f(x)\cdot 0 & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ 0\cdot g(x) & x\in(\frac{1}{2},1]\end{cases}=f(x)g(x)$ ולכן יש מחלקי אפס.

שאלה 6. יהי R חוג בלי יחידה.

א.נאמר כי R בוליאני אם לכל איבר $x \in R$ מתקיים $x^2 = x$. הוכיחו שאם R בוליאני, אז הוא חילופי.

הוכחה:

יהיו $x, y \in R$ אזי לפי הנתון $(x+y)^2 = x+y$ לכן $x+y = (x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2+yx+xy+y^2 = x+yx+xy+y$ לכן לאחר צימצום האגפים נקבל $xy+yx = 0$ או במילים אחרות $xy = -yx$ בנוסף אם נציב $x = y$ נקבל $x = x^2 = -x^2 = -x$ כלומר נקבל גם כי $-yx = yx$ לכן $xy = yx$ לכל זוג איברים ולכן החוג חילופי.

ב. רשות: הוכיח שאם לכל $x \in R$ מתקיים $x^3 = x$, אז R חוג חילופי.

הוכחה:

נוכיח בשלבים, ראשית נראה שאין איברים נילפוטנטים (איברים שונים מאפס שאפס הינו חזקה שלהם)

יהי $x \in R$ כך שקיים m טבעי שעבורו מתקיים $x^m = 0$. יהי n מספר טבעי מספיק גדול כך ש־$3^n > m$, אזי מתקיים לפי הנתון ש־$0 = \dot{0} x^{3^n-m} = x^{3^n-m} \cdot x^m = x^{3^n}$. מצד שני, לפי הנתון $x = x^{3^n}$, לכן $x = 0$.

כעת נראה שכל $a \in R$ המקיים $a^2 = a$, מתחלף עם כל איברי החוג.

יהי a כזה ו־x כללי ב־R. נקבל:

$$(axa-ax)^2 = axaaxa - axaax - axaxa + axax = axa^2xa - axa^2x - axaxa + axax = axaxa - axax - axaxa + axax = 0$$

לפי מה שהראינו, אין בחוג איברים נילפוטנטים, לכן $axa = ax$. באופן דומה, ניתן לקבל $axa = xa$ ולכן בסך הכל $ax = xa$.

נשים לב שמהנתון מתקיים שלכל $x \in R$ מתקיים $(x^2)^2 = x^4 = xx^3 = xx = x^2$.

יהיו $x, y \in R$. לפי מה שהראינו, מתקיים $xy = (xy)^3 = xyxyxy = x(yx)^2y = (yx)^2xy = yxyxxy = yxyx^2y = yxyyx^2 = yxy^2x^2 = yy^2xx^2 = y^3x^3 = yx$.

כלומר, R הוא חוג חילופי.