תרגיל 4

להגשה עד 25.11.15

שאלה 1

יהי $(\mathbb{X},\mathbb{A})$ מרחב מדיד, ותהי $a\in\mathbb{X}$. נגדיר: $\delta_a:\mathbb{A}\to[0,\infty]$ על ידי:

$$\delta_a(E):=\begin{cases}1 & a\in E\\ 0 & a\notin E\end{cases}$$

הוכיחו כי: δ_a היא מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

שאלה 2

תהי $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מידות חיוביות מעל $\mathbb{A}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ב $[0,\infty]$. לכל $E\in\mathbb{A}$ נגדיר:

$$\mu(E):=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\mu_n(E)$$

הוכיחו כי μ מידה חיובית מעל $\mathbb{A}$.

שאלה 3

יהי $(\mathbb{X},\mathbb{A},\mu)$ מרחב מידה חיובית. הוכיחו כי הבאים שקולים:

1. לכל $E\in\mathbb{A}$ כך ש $\mu(E)=\infty$, קיימת $F\in\mathbb{A}$ כך ש: $F\subseteq E$ ו:

$$0<\mu(F)<\infty$$

2. לכל $E\in\mathbb{A}$ מתקיים:

$$\mu(E)=\sup\{\mu(F):\mu(F)<\infty\;;\;E\supseteq F\in\mathbb{A}\}$$

רמז לכיוון 1⇐2 : נניח בשלילה כי

$$w:=\sup\{\mu(F):\mu(F)<\infty\;;\;E\supseteq F\in\mathbb{A}\}<\mu(E)$$

אזי קיימת סדרה $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ב $\mathbb{A}$, כך שלכל $n\in\mathbb{N}$: $\mu(F_n)<\infty$,

$$\mu(F_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}w$$

מה ידוע על:

$$?\;\bigcup_{n\in\mathbb{N}}F_n$$

הערה: מידה המקיימת את התנאים בתרגיל זה נקראת מידה סופית מקומית.

שאלה 4

יהי $(X,\mathbb{A})$ מרחב מדיד, ויהיו $f,g\colon X\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות־$\mathbb{A}$. הראו כי הפונקציה:

$$h(x) := \frac{f(x)}{g(x)}\mathbf{1}_{[g\neq 0]}(x)$$

הינה מדידה־$\mathbb{A}$.

בהצלחה :)