

תרגיל 2

להגשה עד 30.11.16

שאלה 1

יהיו $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ שתי משפחות של קבוצות ב- X . הראו כי אם $\mathbb{A}_1 \subseteq \mathbb{A}_2 \subseteq \sigma(\mathbb{A}_1)$ אזי נובע כי $\sigma(\mathbb{A}_1) = \sigma(\mathbb{A}_2)$.

שאלה 2

יהיו X קבוצה, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}(X)$. הראו כי לכל $A \in \sigma(\mathbb{A})$ קיימת משפחה בת מנייה $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ כך ש: $A \in \sigma(\mathbb{B})$.

הדרכה:

1. הראו כי קבוצת הקבוצות ב- $\sigma(\mathbb{A})$ המקיימת תכונה זו הינה σ אלגברה.

2. הראו כי הקבוצות ב- \mathbb{A} מקיימות תכונה זו והסיקו את הנדרש.

שאלה 3

נניח ש $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ הינן מידות על מרחב מדיד (X, \mathbb{A}) ולכל $A \in \mathbb{A}$ נגדיר: $\mu_n(A)$.

$$\mu(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A)$$

האם μ הינה מידה? אם לא תנו דוגמא נגדית.

שאלה 4

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מרחב מידה חיובית, ותהי Y קבוצה לא ריקה. נתונה פונקציה $f: X \rightarrow Y$.

1. נגדיר: $\mathbb{B}_f := \{F \subseteq Y : f^{-1}(F) \in \mathbb{A}\}$. הוכיחו כי (Y, \mathbb{B}_f) הינו מרחב מדיד.

2. לכל קבוצה $E \subseteq Y$ ששייכת ל \mathbb{B}_f , נגדיר: $\nu(E) := \mu(f^{-1}(E))$.

הוכיחו כי (Y, \mathbb{B}_f, ν) הינו מרחב מידה חיובית.

שאלה 5

יהי (X, \mathbb{A}, μ) מרחב מידה חיובית. הוכיחו כי הבאים שקולים:

1. לכל $E \in \mathbb{A}$ כך ש $\mu(E) = \infty$, קיימת $F \in \mathbb{A}$ כך ש: $F \subseteq E$ ו: $0 < \mu(F) < \infty$.

2. לכל $E \in \mathbb{A}$ מתקיים: $\mu(E) = \sup \{\mu(F) : \mu(F) < \infty ; E \supseteq F \in \mathbb{A}\}$.

רמז לכיוון 1: נניח בשלילה כי $\mu(E) = \infty$ ו: $\mu(F) < \infty ; E \supseteq F \in \mathbb{A}$ לא קיימת. אזי קיימת סדרה $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ב \mathbb{A} , כך שלכל $n \in \mathbb{N}$: $\mu(F_n) < \infty$, ומתקיים: $w := \sup \{\mu(F) : \mu(F) < \infty ; E \supseteq F \in \mathbb{A}\} < \mu(E)$. מה ידוע על: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$?

הערה: מידה המקיימת את התנאים בתרגיל זה נקראת מידה סופית מקומית.

בהנאה!