בס"ד
מבחן במתמטיקה בדידה תש"ע סמסטר קיץ מועד א
מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.
משך המבחן: שלש שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.
הוראות הפעלה:
יש לענות בפירוט על 5 שאלות בדיוק, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון.
המחברות משמשות לטיוטה בלבד, ולא יבדקו.
הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1

יהיו X,Y,Z שלוש קבוצות ותהיינה $f:X\to Y, g:Y\to Z$ פונקציות. נסמן $h:=g\circ f$.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. (7) אם $C\subseteq X$ ו h חח"ע אז $C=f^{-1}\left[f\left[C\right]\right]$.
2. (7) אם $C\subseteq Y$ ו h על אז $C=f\left[f^{-1}\left[C\right]\right]$.
3. (6) אם $C,D\subseteq Y$ ו h על אז $g\left[C\cap D\right]=g\left[C\right]\cap g\left[D\right]$.

פתרון

נוכיח שאם $g\circ f$ חח״ע אז f חח״ע. נניח ש $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$ מכיוון ש g פונקציה אז $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ מכיוון ש $g\circ f$ חח״ע נקבל ש $x_1=x_2$.

סעיף 1: נכון

יהי $x\in C$ נסמן $f(x)=y$ ואז $y\in f\left[C\right]$ מכיוון ש $f(x)=y$ נקבל ש $x\in f^{-1}\left[f\left[C\right]\right]$.

יהי $x\in f^{-1}\left[f\left[C\right]\right]$ ז״א קיים $y\in f\left[C\right]$ כך ש $f(x)=y$. $y\in f\left[C\right]$ ז״א קיים $z\in C$ כך ש $f(z)=y$ מכיוון ש f חח״ע $x=z$ ולכן $x\in C$.

סעיף 2: לא נכון

דוגמא נגדית

$$X=\{1,2\},Y=\{1,2\},Z=\{1\}$$
$$f:X\to Y$$
$$f(1)=1,f(2)=1$$
$$g:Y\to Z$$
$$g(1)=1,g(2)=1$$

נשים לב ש h על. אם $C=\{1,2\}$ אז $f\left[f^{-1}\left[C\right]\right]=\{1\}$.

סעיף 3: לא נכון

נשתמש בדוגמא של סעיף 2 ונסמן $C=\{1\},D=\{2\}$ ואז נקבל ש

$$\{\ \}=g\left[C\cap D\right]\neq g\left[C\right]\cap g\left[D\right]=\{1\}.$$

4. סעיף נוסף (לא הופיע במבחן): אם $C,D\subseteq Y$ ו h חח״ע אז $g\left[C\cap D\right]=g\left[C\right]\cap g\left[D\right]$. (5 נקודות)

לא נכון

דוגמא נגדית

$$X=\{1,2\},Y=\{1,2,3\},Z=\{1,2\}$$
$$f:X\to Y$$
$$f(1)=1,f(2)=2$$
$$g:Y\to Z$$
$$g(1)=1,g(2)=2,g\left(3\right)=2$$

נשים לב ש h חח״ע.

$C=\{3\},D=\{2\}$ ואז $\{\ \}=g\left[C\cap D\right]\neq g\left[C\right]\cap g\left[D\right]=\{2\}$.

שאלה 2

יהי S יחס על $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת כל הפונקציות מ $\mathbb{R}$ ל $\mathbb{R}$)
המוגדר ע"י $(f,g)\in S$ אם ורק אם לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$.

1. הוכיחו ש S יחס שקילות.
2. תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מצאו $|[f]|$, כלומר מהי עוצמת מחלקת השקילות? (רמז: $f=g+h\Leftrightarrow(f,g)\in S$ עבור $h\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$)
3. מהי עוצמת קבוצת המנה, כלומר מצאו $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S|$?

רמז לסעיף 3
שלב א: לכל $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ נגדיר פונקציה g כך שלכל $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\lfloor f(x)\rfloor$ הוכח ש $(f,g)\in S$.
שלב ב: נגדיר פונקציה $\Psi:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\to[0,1)^{\mathbb{R}}$ כך שלכל $[f]\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$, $\Psi([f])=g$ (g הוגדר בשלב א)
שלב ג: הוכח ש Ψ מוגדרת היטב חח"ע ועל

פתרון

סעיף 1

1. רפלקסיביות: תהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)-f(x)=0$ מכיוון ש $0\in\mathbb{Z}$ נקבל $(f,f)\in S$.
2. סימטריות: נניח ש $(f,g)\in S$ אז לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$ ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ $g(x)-f(x)=-(f(x)-g(x))\in\mathbb{Z}$ ז"א $(g,f)\in S$.
3. טרנזיטיביות: נניח ש $(f,g)\in S$ ו $(g,h)\in S$ ז"א לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}$ ו $g(x)-h(x)\in\mathbb{Z}$ ואז לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)-h(x)=f(x)-g(x)+g(x)-h(x)\in\mathbb{Z}$ לכן $(f,h)\in S$.

סעיף 2

יהי $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ על פי הגדרת S נקבל ש $[f]_S=\{g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\,|\,\forall x\in\mathbb{R}: f(x)-g(x)\in\mathbb{Z}\}$. נחשב את העוצמה של $[f]_S$. לכל $g\in[f]_S$ נגדיר פונקציה $h:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ ע"י לכל $x\in\mathbb{R}$ $h(x)=g(x)-f(x)$. נגדיר פונקציה $\psi:\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}\to[f]_S$ ע"י לכל $h\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$, $\psi(h)=f+h$.
הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שעל פי הגדרת h $f+h\in[f]_S$ ואם $h_1=h_2$ אז לכל $x\in\mathbb{R}$ $h_1(x)=h_2(x)$ ולכן $f(x)+h_1(x)=f(x)+h_2(x)$ ז"א $\psi(h_1)=\psi(h_2)$
חח"ע - אם $h_1\neq h_2$ אז קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $h_1(x)\neq h_2(x)$ ולכן $f(x)+h_1(x)\neq f(x)+h_2(x)$ ז"א $\psi(h_1)\neq\psi(h_2)$.
על – יהי $t\in[f]_S$ ז"א לכל $x\in\mathbb{R}$ $t(x)-f(x)\in\mathbb{Z}$ ולכן $t-f\in\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$ ואז $\psi(t-f)=f+t-f=t$.
סה"כ קיבלנו $|[f]_S|=|\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}|=\aleph_0^{\aleph}=2^{\aleph}$.

סעיף 3

לכל $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ נגדיר פונקציה g כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-\lfloor f(x)\rfloor$. כעת לכל $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-g(x)=\lfloor f(x)\rfloor\in\mathbb{Z}$ ולכן $(f,g)\in S$.

נגדיר פונקציה $\Psi:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S\to[0,1)^{\mathbb{R}}$ כך שלכל $[f]_S\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}/S$, $\Psi([f]_S)=g$.

ψ מוגדרת היטב- לכל $x\in\mathbb{R}$ $g(x)=f(x)-\lfloor f(x)\rfloor\in[0,1)$. אם $[f]_S=[h]_S$ אז לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)-h(x)\in\mathbb{Z}$ ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ $f(x)-\lfloor f(x)\rfloor=h(x)-\lfloor h(x)\rfloor$ ז"א $\psi([f]_S)=\psi([h]_S)$.

חח"ע – נניח ש $[f]_S\neq[h]_S$ ז"א קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)-h(x)\notin\mathbb{Z}$ מכיוון ש $\lfloor f(x)\rfloor-\lfloor h(x)\rfloor\in\mathbb{Z}$ נקבל ש $f(x)-h(x)\neq\lfloor f(x)\rfloor-\lfloor h(x)\rfloor\Rightarrow h(x)-\lfloor h(x)\rfloor\neq f(x)-\lfloor f(x)\rfloor$ ולכן $\psi([f]_S)\neq\psi([h]_S)$.

על – יהי $t\in[0,1)^{\mathbb{R}}$ אז לכל $x\in\mathbb{R}$ $\lfloor t(x)\rfloor=0$ ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ נקבל $t(x)-\lfloor t(x)\rfloor=t(x)$ ואז $\psi([t]_S)=t$.

שאלה 3

א.

1. (6) מצא יחס רקורסיה ותנאי התחלה עבור מספר הסדרות באורך n המורכבות מהספרות $0,1,2$ ומקיימות את 2 התנאים הבאים:

(*i*). הרצף 12 אינו מופיע בסדרה.

(*ii*). הספרה 1 לא מופיעה בסדרה יותר משלוש פעמים ברציפות.

(למשל: הסדרה 1111 לא חוקית והסדרה 101110 חוקית.)

2. (3) מצא את מספר הסדרות באורך 6 המורכבות מהספרות $0,1,2$ ומקיימות את 2 התנאים לעיל.

ב. (8) מה מספר התמורות של $\{1,2,...,2n\}$ כך שאף איבר זוגי לא נמצא במקומו.

ג. (3) הוכיחו ש $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א1.נסמן $f(n)$ עבור מספר הסדרות הסדרות באורך n מעל הא״ב $\{0,1,2\}$ שלא כוללות את הרצף 12 והספרה 1 לא מופיעה יותר משלוש פעמים ברציפות.

אם הספרות 0 או 2 מופיעות ראשונות נקבל ש $f(n-1)$ מקיים את תנאי השאלה.

אם הספרה 1 מופיעה ראשונה אז נקבל שתי אפשרויות.

אפשרות 1: 10 ואז יש $f(n-2)$ אפשרויות.

אפשרות 2: 11 ואז נקבל שוב שתי אפשרויות 110 ואז יש $f(n-3)$ אפשרויות או 1110 ואז יש $f(n-4)$ אפשרויות. סה״כ נקבל ש $f(n)=2f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)+f(n-4)$.

תנאי התחלה: $f(0)=1$ המקרה הריק בלבד. $f(1)=3$. בסדרה באורך 2 רק המקרה 12 לא ייתכן ולכן $f(2)=8$. בסדרה באורך 3 המקרים שלא ייתכנו הם כאשר 12 מופיע ראשון ואז יש 3 אפשרויות והמקרה ש 12 מופיע אח״כ ואז יש שוב 3 אפשרויות סה״כ נקבל ש $f(3)=21$.

בסדרה באורך 4 המקרים שלא ייתכנו הם: 1111, 12__, __12, _12_. עבור שני המקרים הראשונים יש 9 אפשרויות לכל אחד ומכיוון ש 1212 נספר פעמיים נקבל סה״כ 17 אפשרויות ולמקרה השלישי יש 9 אפשרויות ולכן התשובה $f(4)=54$.

א2.

תחילה נמצא את $f(5)$. $f(5)=2f(4)+f(3)+f(2)+f(1)=140$.

כעת נמצא את $f(6)$. $f(6)=2f(5)+f(4)+f(3)+f(2)=363$.

ב. נסמן A_i קבוצת הסדרות שהאיבר $2i$ נמצא במקומו. נקבל ש $|A_i|=(2n-1)!$. נחשב את החיתוכים $\bigcap_{k=1}^{t}A_{i_k}=(2n-t)!$.

ואז על פי עקרון ההכלה וההדחה נקבל ש

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\binom{n}{1}(2n-1)!-\binom{n}{2}(2n-2)!+...+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}n!$$

כעת סה״כ מספר הסידורים הוא $\binom{n}{0}2n!$

ולכן סה״כ האפשרויות. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(2n-i)!$.

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית. לכל $k \in \mathbb{N}$ נגדיר $M_k = \{B \subseteq A : |B| = k\}$.

1. (2) הוכיחו ש- $|M_1| = |A|$.
2. (5) יהי $2 \le k \in \mathbb{N}$ הוכיחו ש- $|M_1| \le |M_k|$. רמז: בחרו $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in A$ שונים והגדירו פונקציה חח"ע $f : M_1 \setminus \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_{k-1}\}\} \to M_k$. מה הקשר בין $|M_1|$ ו- $|M_1 \setminus \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_{k-1}\}\}|$?
3. (5) יהי $2 \le k \in \mathbb{N}$ הוכיחו ש- $|M_k| \le |A^k|$.
4. (5) מצאו את עוצמת קבוצת כל תת הקבוצות הסופיות של A.
5. (5) מצאו את עוצמת קבוצת כל תת הקבוצות האינסופיות של A.

פתרון

1. $|M_1| = \{B \subseteq A : |B| = 1\} = \{\{a\} \mid a \in A\}$. נגדיר $f : A \to M_1$ ע"י $f(a) = \{a\}$ לכל $a \in A$.

2. : נבחר $x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in A$ שונים ונגדיר $f : M_1 \setminus \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_{k-1}\}\} \to M_k$ ע"י $f(\{a\}) = \{a, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$. אם $\{a\} \neq \{b\}$ אז $\{a, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\} \neq \{b, x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$ (שימו לב ש- a ו- b שונים מ- $x_1, x_2, ..., x_{k-1}$).
M_1 קבוצה אינסופית ו- $|\{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_{k-1}\}\}| = k-1$ ולכן לפי טענה שהוכחנו $|M_1 \setminus \{\{x_1\}, \{x_2\}, ..., \{x_{k-1}\}\}| = |M_1|$.

3. נבחר $x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k \in A$ ונגדיר $f : A^k \to M_k$ ע"י
$$f((a_1, a_2, ..., a_k)) = \begin{cases} \{a_1, a_2, ..., a_k\} & |\{a_1, a_2, ..., a_k\}| = k \\ \{x_1, x_2, ..., x_k\} & otherwise \end{cases}$$
כלומר אם כל איברי הסדרה שונים אז f שולחת את הסדרה לתת הקבוצה המתאימה, אחרת לקבוצה הספציפית שבחרנו. f על (ברור?) ולכן לכל $2 \le k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|M_k| \le |A^k|$.
נשים לב ש- $|A^k| = |A|^k = |A|$ ולכן לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $|M_k| = |A|$.

4. הקבוצה המדוברת, נסמנה $P_{<\infty}(A)$, היא $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$. לפי טענה שהוכחנו $|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k| \le |\mathbb{N}| \cdot |A| = |A|$. כמובן $|A| = |M_1| \le |\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k|$ ולכן לפי ק.ש.ב. $|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k| = |A|$.

5. מתקיים $P(A) = P_{<\infty}(A) \cup P_\infty(A)$ כאשר $P_\infty(A)$ היא קבוצת תתי הקבוצות האינסופיות של A (שימו לב שזהו איחוד זר). כמו כן $|P(A)| = 2^{|A|}$, לפי משפט קנטור $|A| < 2^{|A|}$. לפי משפט שהוכחנו, $|P_\infty(A)| = |P(A) \setminus P_{<\infty}(A)| = 2^{|A|}$.

שאלה 5

תהי (A,R) קס"ח. לכל $a,b\in A$, נגדיר את הקטע $[a,b]$ (של A):
$[a,b]=\{x\in A\mid aRx\wedge xRb\}$.

1. (3) הוכח או הפרך: לכל $a,b\in A$, הקטע $[a,b]$ הינו קבוצה סדורה לינארית (כלומר קבוצה בעלת יחס סדר מלא תחת היחס R).
2. (3) עבור הקס"ח $(\mathbb{N},|)$ (כאשר $|$ הוא היחס "מחלק את") רישמו במפורש את $[2,18]$ ואת $[14,21]$.
3. (14) נסמן ב- $P_s(A)$ את קבוצת כל הקטעים של A. $B\subseteq P_s(A)$ תקרא נחמדה אם לכל $[a,b]\neq[c,d]\in B$ מתקיים $[a,b]\cap[c,d]=\varnothing$. הוכח שקיימת קבוצה נחמדה $C\subseteq P_s(A)$ שהיא מקסימלית ביחס להכלה. כלומר לכל $D\subseteq P_s(A)$ כך ש $D\supset C$ (מכילה ממש), D אינה נחמדה.

פתרון

1+2. $[2,18]=\{2,6,18\}$, $[14,21]=\{\}$. שימו לב ש- $[2,20]=\{2,4,10,20\}$ וזו איננה קס״ל (תחת היחס $|$), דוגמא המפריכה את הטענה ב-1.

3. נגדיר $T=\{B\subseteq P_s(A)\mid B \text{ נחמדה}\}$. T לא ריקה כי למשל $\{[a,b]\},\phi\in T$.

נגדיר יחס סדר על T ע״י $B_1\leq B_2$ אם״ם $B_1\subseteq B_2$ לכל $B_1,B_2\in T$. תהי $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת לא ריקה ב- T. נסמן $B=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$, נוכיח $B\in T$. ואכן, יהיו $[a,b],[c,d]\in B$ כך ש $[a,b]\neq[c,d]$, לכן קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $[a,b]\in B_\alpha$ ו $[c,d]\in B_\beta$. מאחר ו $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ניתן להניח בה״כ ש $B_\alpha\subseteq B_\beta$. לכן, מאחר ו $[a,b],[c,d]\in B_\beta$, ו $[a,b]\neq[c,d]$ ו B_β קבוצה נחמדה, מתקיים $[a,b]\cap[c,d]=\varnothing$. כמובן שלכל $\alpha\in I$, $B_\alpha\subseteq B$ כלומר $B_\alpha\leq B$ לכן B מהווה חסם מלעיל לשרשרת. לפי צורן קיים איבר מקסימלי, כלומר קבוצה נחמדה מקסימלית.

שאלה 6

א. (10) נתונים n כדורים שחורים זהים, כדור לבן אחד ו-$n+1$ קופסאות שונות. כל קופסא יכולה להכיל לכל היותר כדור אחד. בכמה דרכים ניתן למקם כדור אחד או יותר בקופסאות?

ב. תהי U קבוצה ותהיינה $A,B\subseteq U$, נגדיר פעולה חדשה: $A\bullet B=A^c\cap B^c$ (המשלים הינו ביחס ל-U).

1.(3) הראו שניתן לבטא את הקבוצות A^c, $A\cup B$ ו- $A\cap B$ בעזרת הפעולה $\bullet$ בלבד (וכמובן הקבוצות A ו-B).

2.(2) הוכח או הפרך: הפעולה $\bullet$ הינה אסוציאטיבית.

3.(3) נגדיר יחס R על $P(U)$ ע"י $(A,B)\in R$ אם"ם $B^c\subseteq A\bullet B$. האם R יחס סדר? האם R יחס שקילות על $P(U)$?

4.(2) עבור $U=\{1,2,3\}$, אם R יחס סדר שרטטו דיאגרמת הסה. אם R יחס שקילות רישמו את קבוצת המנה.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

נתבונן ב-2 האפשרויות הבאות:

1. לא שמים כדור לבן - לכן נחליט עבור כל אחת מ-$n+1$ הקופסאות שנותרו ריקות האם למקם בה כדור שחור או לא וזאת ניתן לעשות ב- $2^{n+1}-2$ דרכים (-1 עבור האפשרות ששמנו $n+1$ כדורים שחורים ב-$n+1$ המקומות, -1 עבור האפשרות שלא שמנו כלל כדור שחור).

2. שמים כדור לבן - וזאת ניתן לבצע ב-$n+1$ דרכים ואז נחליט עבור כל אחת מ-n הקופסאות שנותרו ריקות האם למקם בה כדור שחור או לא וזאת ניתן לעשות ב-2^n דרכים.

לכן התשובה המבוקשת: $2^{n+1}-2+(n+1)2^n=2^n(n+3)-2$.

ניתן לפתור את התרגיל גם בעזרת סכומים.

ב. 1. $A^c=A^c\cap A^c=A\bullet A$

$$A\cup B=(A^c\cap B^c)^c=(A\bullet B)^c=(A\bullet B)\bullet(A\bullet B)$$

$$A\cap B=(A^c)^c\cap(B^c)^c=A^c\bullet B^c=(A\bullet A)\bullet(B\bullet B).$$

1. השאלה היא האם $(A\cup B)\cap C^c=A^c\cap(B\cup C)$ וזה ודאי לא נכון. למשל $A=\{\},B=\{\},C=\{1\},U=\{1,2\}$.

2. $B^c\subseteq A\bullet B\ \Leftrightarrow\ B^c\subseteq A^c\cap B^c\ \Leftrightarrow\ B^c\subseteq A^c\ \Leftrightarrow\ A\subseteq B$ לכן R יחס סדר.

3. דיאגרמת הסה עבור הקס"ח $(P(U),\subseteq)$ כאשר $U=\{1,2,3\}$ ראינו בכיתה.