אלגברה מופשטת 1, תרגיל בית 2

מתרגלים: סולי וישקאוצן ואדם צ'פמן. להגשה ב23.11 או ב20.11 בהתאם לשיעור התרגיל.

1) תהי חבורה G. יהיו שני איברים a,b המקיימים $a^2=e,\ a^{-1}b^2a=b^3$. הראו שמתקיים $b^5=e$.

פיתרון:

$ab^2a=b^3$. נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל $ab^4a=b^6$. כעת $b^2a=ab^3$ ולכן $b^2aba=ab^4a=b^6$. נצמצם משמאל ב b^2 ונקבל $aba=b^4$. נעלה זאת שוב בריבוע ונקבל $ab^2a=b^8$. שוב בעזרת $b^2a=ab^3$ נקבל $a^2b^3=ab^2a=b^8$. נצמצם ב b^5 מימין ונקבל את התוצאה הרצוייה.

2) נביט בקבוצה $R\cup\{\infty\}$ ובפעולה $a*b=\dfrac{a+b}{1-ab}$ [מתייחסים ל∞ כאל גבול, דהיינו אם נתון $a\in R$ אזי $\infty*a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+a}{1-xa}$ ו $a*\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+x}{1-ax}$ ו $\infty*\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{x+y}{1-xy}$]. האם זו חבורה למחצה? האם זו מונויד?

פיתרון:

[הסגירות היא די פשוטה]

נראה אסוציאטיביות

$a*(b*c)=\dfrac{a+(b*c)}{1-a(b*c)}=\dfrac{a+\dfrac{b+c}{1-bc}}{1-a\dfrac{b+c}{1-bc}}=\dfrac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}$. לפי

אותה נוסחה (בידיעה שהפעולה אבלית) מקבלים גם

$(a*b)*c=\dfrac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ac}$ ולכן $a*(b*c)=(a*b)*c$.

זו מונויד ואיבר היחידה בה הוא 0.

3) נביט בקבוצה $(N\cup\{0\})\times(N\cup\{0\})$ ונגדיר פעולה * על הקבוצה

המקיימת $(a,b)*(c,d)=\begin{cases}(a+c-b,d) & c>b\\ (a,b-c+d) & otherwise\end{cases}$.

a. הראו כי הקבוצה יחד עם הפעולה הנ"ל מהווה מונויד.

b. מהי קבוצת האיברים ההפיכים משמאל? האם היא חבורה?

[אני מדלג על הסגירות ועל האסוציאטיביות]

איבר היחידה הינו $(0,0)$.

קבוצת האיברים ההפיכים משמאל היא $\{(a,0):a\in N\cup\{0\}\}$. היא איננה חבורה משום שהיא כוללת איברים שאינם הפיכים מימין (למען האמת כל איבר פרט ל$(0,0)$ הוא אינו הפיך מימין). דרך נוספת להראות שהיא איננה חבורה היא לומר שההופכיים משמאל של האיברים שלה אינם נמצאים בקבוצה.

4) מצאו את כל התת-חבורות של החבורות $U_7, Z_4\times Z_2$.

פיתרון:

תת-החבורות של $Z_4\times Z_2$ הן $Z_4\times Z_2$, $Z_4\times\{0\}$, $\{0,2\}\times Z_2$, $\{0,2\}\times\{0\}$, $\{0\}\times Z_2$, $\{(0,0),(2,1)\}$, $\{(0,0),(1,1),(2,0),(3,1)\}$ ו $\{0\}\times\{0\}$.

תת-החבורות של U_7 הן U_7, $\{1,2,4\}$, $\{1,6\}$ ו $\{1\}$.

5) הראו ש $\{1,n-1\}$ היא תמיד תת-חבורה של U_n (הוכיחו קודם שהיא תת-קבוצה).

פיתרון:

$\gcd\{n-1,n\}=1$ תמיד (קל לראות זאת לפי אלגוריתם אוקלידס) ולכן $n-1\in U_n$. כעת, $(n-1)(n-1)=n^2-2n+1\equiv 1 \pmod n$, ולכן $\{1,n-1\}$ תת-קבוצה של U_n הסגורה לכפל ולהפכי ולכן היא תת-חבורה.