תרגיל 11 מבוא לתורת החבורות

שאלה 11.1 מצאו את הסדר של כל איבר בחבורה הדיהדרלית D_n.
פתרון: ראינו כבר ש $\mathrm{o}(\sigma)=n$ ולכן

$$\mathrm{o}(\sigma^k)=\frac{n}{\gcd(k,n)}$$

כמו כן, נשים לב ש

$$(\tau\sigma^k)^2=\tau\sigma^k\tau\sigma^k=\tau\tau\sigma^{-k}\sigma^k=\mathrm{id}$$

ולכן כל האיברים מהצורה הזאת הם מסדר 2.

שאלה 11.2

א) מצאו את כל תתי החבורות של D_4.
פתרון: קודם כל נמצא את החבורות הציקליות. יש 5 איברים מסדר 2

$$\{\sigma^2,\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,\tau\sigma^3\}$$

וזה מייד נותן לנו 5 תתי חבורות מסדר 2

$$H_1=\{\mathrm{id},\tau\}\quad H_2=\{\mathrm{id},\tau\sigma^2\}$$

$$H_3=\{\mathrm{id},\tau\sigma\}\quad H_4=\{\mathrm{id},\tau\sigma^3\}$$

$$N_5=\{\mathrm{id},\sigma^2\}$$

אני ממספר ככה בכוונה. כי זה הולך לצאת כמו הציור שהיה לנו על הלוח בשיעור שעבר.
יש לנו שני איברים מסדר 4 והם σ,σ^3. אז יש לנו עוד תת חבורה

$$N_2=\{\mathrm{id},\sigma,\sigma^2,\sigma^3\}=\langle\sigma\rangle$$

ראינו בכיתה גם ש

$$N_1=\langle\tau,\sigma^2\rangle=\{\mathrm{id},\sigma^2,\tau,\tau\sigma^2\}$$

היא גם תת חבורה (נורמלית). יש עוד תת חבורה מסדר 4 והיא

$$N_3=\{\mathrm{id},\sigma^2,\tau\sigma,\tau\sigma^3\}$$

אנחנו טוענים שאין עוד תתי חבורות ממש. למה? נניח H תת חבורה נוספת שלא נמצאת ברשימה הזאת. אז לפי לגרנז' היא מסדר 2 או 4. את כל החבורות הציקליות מצאנו בוודאות (כי עברנו על כל החבורות שנוצרות על ידי איבר אחד) אז בהכרח H היא תת חבורה מסדר 4 לא ציקלית. ולכן יש בה שלושה איברים מסדר 2 ואת id. כלומר היא מכילה שלושה איברים מתוך הרשימה

$$\{\sigma^2,\tau,\tau\sigma,\tau\sigma^2,\tau\sigma^3\}$$

יש 10 דרכים לבחור 3 איברים מהרשימה ולבדוק אם הם מהווים תת חבורה יחד עם id אפשר לעבור על כל הדרכים ולראות שמצאנו כבר את כל תתי החבורות.

ב) איזה מתתי החבורות הן נורמליות?
פתרון: כל התתי חבורות מסדר 4 הן נורמליות כי הן מאינדקס 2.
התת חבורה N_5 גם נורמלית כפי שראינו בכיתה. זה קורה כי

$$\sigma\sigma^2\sigma^{-1} = \sigma^2 \in H$$

$$\tau\sigma^2\tau^{-1} = \tau\sigma^2\tau = \sigma^2 \in H$$

תתי החבורות H_1, H_2, H_3, H_4 לא נורמליות. נדגים זאת למשל עבור H_1:

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau\sigma^{-2} = \tau\sigma^2 \notin H_1$$

ג) ציירו את דיאגרמת תת החבורות של D_4.
פתרון: זה בדיוק הציור שעשיתי באחד התרגילים בכיתה. בכל אופן קל לעשות את הציור אחרי שיש תיאור מפורש של החבורה.

שאלה 11.3 יהי k מספר אי זוגי. הוכיחו כי

$$\langle\sigma^2, \tau\rangle \times \langle\sigma^k\rangle \cong D_{2k}$$

הדרכה: הגדירו

$$f : \langle\sigma^2, \tau\rangle \times \langle\sigma^k\rangle \to D_{2k}$$

לפי

$$f(\alpha, \beta) = \alpha\beta$$

פתרון: נשים לב ש

$$\sigma\sigma^k = \sigma^k\sigma$$

וכן

$$\tau\sigma^k = \sigma^{-k}\tau = \sigma^k\tau$$

ולכן σ^k מתחלף עם כל איבר של D_{2k} ולכן ממילא כל איבר בחבורה $\langle\sigma^k\rangle = \{\mathrm{id}, \sigma^k\}$ מתחלף עם כל איבר ב D_{2k}. עם האינפורמציה הזאת קל להוכיח ש f הומומורפיזם כי

$$f((\alpha_1, \beta_1)\cdot(\alpha_2, \beta_2)) = f(\alpha_1\alpha_2, \beta_1\beta_2) = \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 = \alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 = f((\alpha_1, \beta_1))f((\alpha_2, \beta_2))$$

עכשיו נוכיח כי f חד חד ערכית. נניח ש

$$f((\alpha, \beta)) = 1$$

כלומר

$$\alpha\beta = 1$$

אז

$$\alpha=\beta^{-1}$$

אבל

$$\alpha\in\langle\sigma^2,\tau\rangle$$

ו

$$\beta^{-1}\in\langle\sigma^k\rangle$$

אז קיבלנו ש

$$\alpha\in\langle\sigma^2,\tau\rangle\cap\langle\sigma^k\rangle$$

היות ש

$$\sigma^k\notin\langle\sigma^2,\tau\rangle$$

(כי k אי זוגי!) אז נקבל ש

$$\alpha=\mathrm{id}$$

ולכן

$$\beta=\mathrm{id}$$

כנדרש. היות ש f היא פונקציה חח"ע בין שתי קבוצות סופיות מאותו גודל היא גם על ולסיכום היא איזומורפיזם כנדרדש.

שאלה 11.4 מצאו שני שיכונים שונים של D_4 לתוך S_4. כלומר מצאו שני מונומורפיזמים שונים $f:D_4\to S_4$.
פתרון: ראינו בכיתה איך למצוא שיכון כזה. ניתן שניים למשל
שיכון 1:

$$\mathrm{id}\mapsto\mathrm{id}$$

$$\sigma\mapsto(1234)$$

$$\sigma^2\mapsto(13)(24)$$

$$\sigma^3\mapsto(1432)$$

$$\tau\mapsto(13)$$

$$\tau\sigma\mapsto(12)(34)$$

$$\tau\sigma^2 \mapsto (24)$$

$$\tau\sigma^3 \mapsto (14)(23)$$

שיכון 2:

$$\mathrm{id} \mapsto \mathrm{id}$$

$$\sigma \mapsto (1234)$$

$$\sigma^2 \mapsto (13)(24)$$

$$\sigma^3 \mapsto (1432)$$

$$\tau \mapsto (24)$$

$$\tau\sigma \mapsto (14)(23)$$

$$\tau\sigma^2 \mapsto (13)$$

$$\tau\sigma^3 \mapsto (12)(34)$$

שאלה 11.5 הוכיחו או הפריכו: A_4 איזומורפית ל D_6.
פתרון: לא איזומורפי. ב A_4 יש הרבה איברים מסדר 3. למשל (123) (124) (134) וכו' ואילו ב D_6 יש רק שני איברים מסדר 3 הלא הם σ^2 ו σ^4.