תזכורת:

אנחנו מגדירים ש: $|A| = |B|$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל. כמו כן, מגדירים ש: $|A| \leq |B|$ אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע. לבסוף, מגדירים ש: $|A| < |B|$ אם: $|A| \leq |B|$ וגם: $|A| \neq |B|$.

מסמנים: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$. ראינו (חלק הוכחנו וחלק אמרנו) שגם הקבוצות הבאות עוצמתן היא $\aleph_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{Q}$. כמו כן, הגדרנו את המונח בת־מניה – קבוצה A היא בת־מניה, אם $|A| \leq \aleph_0$. אמרנו ש־$\aleph_0$ היא העוצמה האינסופית הקטנה ביותר, ולכן אם A בת־מניה אז: $|A| = \aleph_0$ או ש־A סופית.

*איך מוכיחים פורמלית ש־A היא אינסופית? אפשר להגדיר אינסופיות באופן הבא: קבוצה A היא אינסופית, אם קיימת $B \subset A$ כך ש: $|A| = |B|$.

ראינו שאיחוד ומכפלה קרטזית של קבוצות בנות־מניה הן קבוצות בנות־מניה. יתר על כן, איחוד בן־מניה של קבוצות בנות־מניה גם הוא קבוצת בת־מניה. גם חיתוך, הפרש והפרש סימטרי של קבוצות בנות־מניה הוא קבוצה בת־מניה, כי אם A בת־מניה ו־$B \subseteq A$ אז גם B בת־מניה.

מסמנים: $\aleph = |\mathbb{R}|$. ראינו ש: $\aleph_0 < \aleph$.

מה אנחנו רוצים לעשות?

1. לסגור פינות, למשל להוכיח ש: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
2. לתת דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph$ – קטעים פתוחים וסגורים, $\mathbb{C}$.
3. משפט קנטור־שרדר־ברנשטיין, ק.ש.ב. – אם $|B| \leq |A|$ וגם $|A| \leq |B|$ אז: $|A| = |B|$.
4. ראינו ש: $\aleph_0 < \aleph$; האם יש עוצמות גדולות יותר? ואפילו – כמה עוצמות יש?

5. אם קיימת $f:A\to B$ חח"ע, האם קיימת $g:B\to A$ על?

<u>משפט ק.ש.ב.</u>

נוכיח שאם קיימת $f:A\to B$ חח"ע וגם קיימת $g:B\to A$ חח"ע אז קיימת $h:A\to B$ חח"ע ועל.

כדי להוכיח את המשפט, נידרש לטענת עזר אחת או שתיים לפני.

<u>טענה:</u>

לכל קבוצה A קיימות קבוצות B,C כך ש: B,C זרות ו: $|A|=|B|=|C|$.

<u>הוכחה:</u>

נתבונן בקבוצות הבאות: $B=A\times\{0\}\,,C=A\times\{1\}$. ב־$B$ יש זוגות שברכיב השני שלהם יש 0, ב־C יש זוגות שברכיב השני שלהם יש 1 ולכן B,C זרות. כמו כן, $f:A\to B$ המוגדרת ע"י: $f\left(a\right)=\left(a,0\right)$ ו־$g:A\to C$ המוגדרת ע"י: $g\left(a\right)=\left(a,1\right)$ הן חח"ע ועל.

<u>מסקנה:</u> בכל טענה על עוצמות – כמו ק.ש.ב. – אפשר, אם רוצים וצריך, להניח שהקבוצות זרות – אחת מהן נכפיל ב־$\{0\}$ ואת השניה ב־$\{1\}$. כמובן, אם הטענה היא על קבוצות מסוימות, למשל: $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$.

<u>טענה:</u>

תהיינה A,B קבוצות, נניח שקיימות חלוקות $\{A_1,A_2\}$ של A, $\{B_1,B_2\}$ של B. כלומר, $A_1\cup A_2=A$, הקבוצות A_1,A_2 זרות ולא ריקות, ובאופן דומה: $B_1\cup B_2=B$, B_1,B_2 זרות ולא ריקות. אם $|A_1|=|B_1|$ וגם: $|A_2|=|B_2|$, אז: $|A|=|B|$.

<u>הוכחה:</u>

פורמלית, קיימות $f_1 : A_1 \to B_1, f_2 : A_2 \to B_2$ חח"ע ועל, ובאמצעותן אפשר להגדיר פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$ באופן הבא:

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a) & a \in A_1 \\ f_2(a) & a \in A_2 \end{cases}$$

אם חוזרים להגדרה של פונקציות כיחס (ולכן כקבוצה), אז: $f = f_1 \cup f_2$.

ראשית, מכיוון ש־A_1, A_2 זרות ו־f_1, f_2 פונקציות, גם f פונקציה - לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ יחיד עבורו: $f(a) = b$.

שנית, נראה ש־f חח"ע; יהיו $x, y \in A$ כך ש: $f(x) = f(y)$, צ"ל: $x = y$.

נחלק למקרים.

מכיוון שהקבוצות B_1, B_2 זרות, לא ריקות ו־$B_1 \cup B_2 = B$, יש שני מקרים: $f(x), f(y) \in B_1$ או $f(x), f(y) \in B_2$.

אם $f(x), f(y) \in B_1$, לפי ההגדרה $x, y \in A_1$ ו: $f(x) = f(y) = f_1(x) = f_1(y)$; f_1 חח"ע ולכן: $x = y$. באופן דומה עם B_2 ו־f_2.

לבסוף, נראה ש־f על; יהי $b \in B$ ונראה שקיים $a \in A$ עבורו: $f(a) = b$.

אם $b \in B_1$, מכיוון ש־f_1 על קיים $a \in A_1$ עבורו: $f_1(a) = b$. לפי הגדרת f, נקבל ש: $f(a) = b$, כנדרש. באופן דומה עם B_2 ו־f_2.

<u>הערה:</u>

זה נכון לכל חלוקה, לא רק לשתי קבוצות. כלומר, אם $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ חלוקה של A ו־$\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ חלוקה של B, וקיימות $f_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ חח"ע ועל, אז קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל. יתר על כן, $f = \bigcup f_\alpha$. ובלשון עוצמות: אם $|A_\alpha| = |B_\alpha|$ לכל $\alpha \in I$, אז: $|A| = |B|$.

<u>מסקנה:</u> כדי להוכיח ש: $|A| = |B|$, מספיק להסתכל על חלוקות $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}, \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של A, B ולהוכיח ש: $|A_\alpha| = |B_\alpha|$ לכל $\alpha \in I$.

הוכחת ק.ש.ב.

נוכיח שאם קיימת $f : A \to B$ חח"ע וגם קיימת $g : B \to A$ חח"ע אז קיימת $h : A \to B$ חח"ע ועל.

ראשית, נניח שהקבוצות A, B זרות (אם הן לא זרות, אפשר להסתכל על: $A \times \{0\}, B \times \{1\}$...).

שנית, $f : A \to B$ חח"ע. לכן, לכל איבר ב־B קיים מקור אחד ב־A לכל היותר. אם ל־$b \in B$ יש מקור, נסמן אותו (רק בהוכחה הזו כי זה מאד נוח) ב־$f^{-1}(b)$. באופן דומה, $g : B \to A$ חח"ע, אם ל־$a \in A$ יש מקור, נסמן אותו: $g^{-1}(a)$.

כעת, לכל איבר $a \in A$ (אפשר גם להתחיל באיבר $b \in B$) אפשר להתבונן ברצף הבא: ("שרשרת", סדרה...):

$$\ldots \mapsto f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right) \mapsto g^{-1}(a) \mapsto a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a)) \mapsto f(g(f(a))) \mapsto \ldots$$

הרצף ממשיך ימינה "לנצח". לעומת זאת, מצד שמאל הרצף יכול להיעצר – איבר שאין לו מקור.

אם כך, יש לנו שלושה סוגים של רצפים – כאלה שמתחילים משמאל באיבר מ־A, כאלה שמתחילים משמאל באיבר מ־B, וכאלה שלא מתחילים בכלל – ממשיכים "לנצח" גם משמאל.

נסמן את קבוצת כל הרצפים ב־$\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$. אפשר להתייחס לכל רצף כזה כאל קבוצה: $A_\alpha \cup B_\alpha$, כאשר A_α היא קבוצת האיברים מ־A ששייכים לרצף, ו־B_α היא קבוצת האיברים מ־B ששייכים לרצף.

כעת, רצפים שונים הם זרים. אכן, אם איבר a מופיע ברצף מסוים, כל האיברים מימין לו נקבעים על ידו – אם אנחנו יודעים על איבר מסוים ברצף,

אנחנו יודעים מי הם כל האיברים מימין לו -

$$f\left(a\right),g\left(f\left(a\right)\right),f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right),g\left(f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)\right),\ldots$$

מצד שני, מכיוון שהפונקציות חח"ע, גם האיברים משמאל ל־a נקבעים ע"י a, כי לכל איבר יש מקור אחד לכל היותר.

לכן, אם רצפים הם לא זרים, כלומר אותו איבר מופיע בשני רצפים, הם בהכרח שווים. לכן, אם רצפים שונים אז הם זרים.

במילים אחרות, הקבוצות $\left\{A_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ חלוקה של A, $\left\{B_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ חלוקה של B.

לפי הטענה הקודמת, מספיק להוכיח שקיימת: $h_\alpha : A_\alpha \to B_\alpha$ חח"ע ועל לכל $\alpha\in I$, כדי להוכיח את הדרוש.

הפונקציה h_α תוגדר מעט אחרת בכל סוג של רצף.

א. אם הרצף מתחיל באיבר מ־A, אפשר לרשום אותו כך:

$$a\mapsto f\left(a\right)\mapsto g\left(f\left(a\right)\right)\mapsto f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)\mapsto g\left(f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)\mapsto\ldots$$

כאן, $A_\alpha=\left\{a,g\left(f\left(a\right)\right),\ldots\right\},B_\alpha=\left\{f\left(a\right),f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right),\ldots\right\}$. נגדיר את h_α באופן הבא: $h_\alpha\left(x\right)=f\left(x\right)$, כלומר, לוקחת כל איבר מ־A_α לאיבר מימין לו, שנמצא ב־B_α. מכיוון ש־f חח"ע, גם h_α חח"ע; h_α על, המקור של איבר מ־B_α הוא האיבר משמאלו ברצף, שנמצא ב־A_α.

ב. אם הרצף מתחיל באיר מ־B, אפשר לרשום אותו כך:

$$b\mapsto g\left(b\right)\mapsto f\left(g\left(b\right)\right)\mapsto g\left(f\left(g\left(b\right)\right)\right)$$

כאן, $A_\alpha=\left\{g\left(b\right),g\left(f\left(g\left(b\right)\right)\right),\ldots\right\},B_\alpha=\left\{b,f\left(g\left(b\right)\right),\ldots\right\}$. נגדיר h_α באופן הבא: $h_\alpha\left(x\right)=g^{-1}\left(x\right)$, כלומר לוקחת כל איבר מ־$A_\alpha$ לאיבר משמאל לו. באופן דומה למקרה א', h_α חח"ע ועל.

ג. אם הרצף לא מתחיל, אפשר לרשום אותו כך:

$$\ldots \mapsto f^{-1}\left(g^{-1}(a)\right) \mapsto g^{-1}(a) \mapsto a \mapsto f(a) \mapsto g(f(a)) \mapsto f(g(f(a))) \mapsto \ldots$$

כאן, אפשר להגדיר $h_\alpha(x) = f(x)$, כלומר "קופצים" אחד ימינה. אפשר היה גם להגדיר: $h_\alpha(x) = g^{-1}(x)$, כלומר "קופצים" אחד שמאלה, שתיהן חח"ע ועל כמו בסעיפים הקודמים, כמובן שאחת מספיקה לנו כדי להוכיח את הדרוש.

סה"כ, הוכחנו את הדרוש.

עם קנטור־שרדר־ברנשטיין, אפשר להוכיח שוויון בין עוצמות בקלות יחסית.

<u>משפט:</u>

<u>$|\mathbb{Q}| = \aleph_0$</u>.

<u>הוכחה:</u>

לפי ק.ש.ב., מספיק להוכיח ש: $|\mathbb{Q}| \le \aleph_0$ וגם $\aleph_0 \ge |\mathbb{Q}|$.

מצד אחד, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$ ולכן: $\aleph_0 \le |\mathbb{Q}|$.

מצד שני, נגדיר פונקציה $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ באופן הבא: $f(q) = (m, n)$ כאשר $q = \frac{m}{n}$ שבר מצומצם, ואם $q = 0$ אז: $f(0) = (0, 1)$.

f חח"ע; אם $f(q_1) = f(q_2)$, כלומר: $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ כאשר: $q_1 = \frac{m_1}{n_1}, q_2 = \frac{m_2}{n_2}$, נקבל שגם: $q_1 = q_2$. לכן:

$$|\mathbb{Q}| \le |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$$

והוכחנו את הדרוש.

<u>טענה:</u>

אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ו־A לא ריקה, אז קיימת $g : B \to A$ על.

<u>הוכחה:</u>

קיים $x \in A$. לכל $b \in B$ יש מקור אחד ב־A לכל היותר, כלומר קיים $a \in A$ יחיד כך ש: $f(a) = b$ או שלא קיים $a \in A$ כזה. כעת, נגדיר $g : B \to A$ כך:

$$g(b) = \begin{cases} a & \exists a \in A : f(a) = b \\ x & otherwise \end{cases}$$

כלומר, אם ל־b יש מקור, g "מחזירה" אותו למקור שלו; אם לא, שפשוט ילך ל־x.

g מוגדרת היטב, כי לכל $b \in B$ יש מקור אחד לכל היותר.

g על, כי f פונקציה; לכל $a \in A$, יש b יחיד כך ש: $f(a) = b$.

גם הכיוון ההפוך הוא נכון - אם קיימת $g : B \to A$ על, אז קיימת $f : A \to B$ חח"ע. אינטואיטיבית, כאן לכל $a \in A$ יש קבוצת מקורות ב־B; כדי להגדיר פונקציה חח"ע מ־A ל־B צריך לבחור מקור אחד לכל $a \in A$; זה אפשרי בעזרת אקסיומת הבחירה.

<u>מסקנה:</u> על סמך הטענה האחרונה וק.ש.ב., אם אנחנו רוצים להוכיח ש: $|A| = |B|$, אפשר לעשות את הדברים הבאים:

1. למצוא $f : A \to B$ חח"ע ועל.
2. למצוא $f : A \to B, g : B \to A$ חח"ע.

3. למצוא $f:A\to B, g:B\to A$ על.

4. למצוא $f:A\to B$ חח"ע ו־$g:A\to B$ על.

כי לפי הטענה שלנו, $|A|\leq|B|$ אם ורק אם קיימת $g:B\to A$ על.

<u>קבוצות שעוצמתן א:</u>

אנחנו יודעים ש: $|\mathbb{R}|=$ א. נראה עכשיו שכל הקטעים הממשיים והקרנות עוצמתם היא גם א.

נעשה זאת ב־3 שלבים – נראה שעוצמתם של כל הקטעים הסגורים שווה, באמצעות ק.ש.ב. נראה שעוצמת כל הקטעים האחרים גם שווה, ונבחר קטע אחד ספיציפי ונראה שעוצמתו שווה ל־א.

אם כן, יהיו $[a,b],[c,d]$ קטעים סגורים ($a<b, c<d$). נבנה ביניהם פונקציה חח"ע ועל, באופן הבא: $f:[a,b]\to[c,d]$ שתהיה קו ישר: $f(x)=mx+n$, כך ש: $f(a)=c, f(b)=d$. נמצא את m,n המתאימים:

$$\begin{cases} c=f(a)=ma+n \\ d=f(b)=mb+n \end{cases}$$

נחסר את השורה הראשונה מהשניה ונקבל: $d-c=m(b-a)$, לכן: $m=\frac{d-c}{b-a}$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל: $c=\frac{d-c}{b-a}\cdot a+n$ ולכן: $n=\frac{bc-ad}{b-a}$, וסה"כ: $f(x)=\frac{d-c}{b-a}x+\frac{bc-ad}{b-a}$.

אם כן, $|[a,b]|=|[c,d]|$ לכל $a<b, c<d$. כעת, מצד אחד, $(a,b)\subseteq[a,b]$ ולכן: $|(a,b)|\leq|[a,b]|$. מצד שני, $\left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right]\subseteq(a,b)$ ולכן: $\left|\left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right]\right|\leq|(a,b)|$. מכיוון ש: $|[a,b]|=\left|\left[a+\frac{b-a}{3}, b-\frac{b-a}{3}\right]\right|$,

לפי ק.ש.ב. נקבל שגם:

$$|(a,b)| = |[a,b]|$$

זה עובד גם לקטעים מהצורה: $[a,b), (a,b]$.

כעת, נגדיר פונקציה: $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ באופן הבא: $f(x) = \tan x$.

f עולה (כי: $f' = \frac{1}{\cos^2 x}$ חיובית) ולכן חח"ע. f על, כי לכל $y \in \mathbb{R}$, $x = \tan^{-1} y$ יקיים: $f(x) = y$. כדאי לסמן: $\tan^{-1} = \arctan$. לכן: $\aleph = |\mathbb{R}| = \left|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right|$. מכיוון שעוצמות כל הקטעים שוות זו לזו, נקבל שעוצמת כל קטע, סגור או פתוח (או לא זה ולא זה) היא גם א.

לבסוף כל קרן $[a,\infty), (a,\infty), (-\infty,a), (-\infty,a]$ מוכלת ב־$\mathbb{R}$ (ולכן עוצמתן קטנה־שווה מ־א) ומכילה קטע מצד שני (ולכן עוצמתה גדולה־שווה מ־א), ולפי ק.ש.ב., גם עוצמתן של קרנות היא א.

<u>משפט קנטור – תמיד יש דג גדול יותר:</u>

לכל קבוצה A, $|A| < |P(A)|$.

לכאורה, עכשיו יש אינסוף עוצמות, ואפשר לשאול איזה מין אינסוף זה – יש $\aleph_0$ עוצמות אינסופיות שונות? אולי יותר? השאלה לא רלוונטית – לקבוצה יש עוצמה, ואוסף כל העוצמות הוא לא קבוצה.

<u>הוכחת המשפט:</u>

צריך להוכיח ש: $|A| \leq |P(A)|$, כלומר להוכיח שקיימת $f : A \to P(A)$ חח"ע, וגם להוכיח ש: $|A| \neq |P(A)|$, כלומר לא קיימת פונקציה $g : A \to P(A)$ חח"ע ועל.

ראשית, אפשר להגדיר: $f : A \to P(A)$ כך: $f(a) = \{a\}$, f חח"ע (אם $a \neq b$ אז $\{a\} \neq \{b\}$).

שנית, תהי $g : A \to P(A)$ פונקציה, ונראה ש-g לא על. כלומר, נראה שקיימת $B \in P(A)$ שאין לה מקור – לא קיים $a \in A$ עבורו: $g(a) = B$.

אם כן, נתבונן בקבוצה הבאה: $B = \{a \in A | a \notin g(a)\}$, כלומר קבוצת כל האיברים שלא שייכים לתמונה שלהם. נראה של-B אין מקור. נניח בשלילה שקיים $x \in A$ עבורו: $g(x) = B$. האם $x \in B$?

אם $x \in B$, לפי ההגדרה של B, $x \notin g(x)$ ואז: $B \neq g(x)$...

אם $x \notin B$, אז $x \notin g(x)$ ולפי ההגדרה של B, נקבל ש: $x \in B$...

בכל מקרה קיבלנו סתירה, ולכן ל-B אין מקור, כנדרש.