בחינה סופית במשוואות דיפרנציאליות רגילות — 88-240

מועד א' תשע"ו

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: ניתן להשתמש במחשבון כיס ובכל חומר עזר

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. חללית ממריאה מכוכב לכת במהירות התחלתית v_0. נניח שהחללית מתרחקת בקו ישר מכוכב הלכת, והכח היחיד המופעל על החללית הוא כח משיכה; תנועת החללית מתוארת ע"י המשוואה

$$\frac{dv}{dr} \cdot v(r) = -10^{13} \cdot \frac{1}{r^2}$$

כאשר v היא מהירות החללית, כפונקציה של המרחק r ממרכז כוכב הלכת.

(א) פתור את המשוואה בהינתן מהירות התחלתית v_0. נניח שרדיוס כוכב הלכת הוא 10^6 מטר, כך שתנאי ההתחלה הוא

$$v(10^6) = v_0$$

(ב) חשב את "מהירות הבריחה"— המהירות ההתחלתית המיוחדת v_0, כך שהפתרון יקיים $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$. (זאת המהירות ההתחלתית הדרושה לברוח מכח המשיכה של כוכב הלכת.)

(ג) הראה שכל פתרון למשוואה משמר את האנרגיה

$$E(r) = \frac{1}{2}[v(r)]^2 - \frac{10^{13}}{r}$$

כלומר, שלכל פתרון של המשוואה מתקיים $\frac{dE}{dr} \equiv 0$ זהותית לכל r. מהי האנרגיה המתקבלת עבור תנאי ההתחלה בסעיף (ב)?

2. תהי

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

(א) הוכח: קיים פולינום מסדר k שפותר את המשוואה אם ורק אם **כל** פולינום מסדר k פותר אותה.

(ב) מה התנאים על המקדמים $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ כך שפולינום מסדר k יפתור את המשוואה?

(ג) האם זה נכון גם עבור משוואה אי־הומוגנית

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

והאם זה תלוי בפונקציה $f(x)$? הסבר!

3. הפונקציות ה**טריגונומטריות ההיפרבוליות** מוגדרות על ידי

$$\begin{aligned}\cosh(x) &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\end{aligned}$$

(א) הראה את הזהויות

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x)\end{aligned}$$

(ב) הראה כי כל זוג פונקציות $(f(x), g(x))$ המקיים

$$\begin{aligned}f'(x) &= g(x) \\ g'(x) &= f(x)\end{aligned}$$

הם צירופים ליניאריים של e^x ו־e^{-x} (ובכך צירופים ליניאריים של $\sinh(x)$ ו־$\cosh(x)$).

(ג) הראה כי כל זוג פונקציות $(a(x), b(x))$ המקיים

$$\begin{aligned}a'(x) &= b(x) \\ b'(x) &= -a(x)\end{aligned}$$

הם צירופים ליניאריים של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$.

.4

(א) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x}y_1 \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{x}y_2 \end{aligned}$$

(ב) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x}y_1 + 3x \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{x}y_2 + x^2 \end{aligned}$$

.5 פתור את המשוואה

$$xy'' + y' + (3-2x)y = 0$$

בסביבה של $x = 0$.

.6 מטרת התרגיל לחשב התמרת לפלס של $J_0(x)$ (פונקציית בסל מסדר 0).

(א) זכרו כי J_0 פותר את משוואת בסל מסדר 0

$$x^2 J_0'' + xJ_0' + x^2 J_0 = 0$$

נחלק ב־x כדי להביא אותו לצורה

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0$$

הפעל התמרת לפלס על שני האגפים. (זכרו את התכונות

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](s) &= s\mathcal{L}[y] - y(0) \\ \mathcal{L}[y''](s) &= s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}[xy](s) &= -\frac{d\mathcal{L}[y]}{ds} \end{aligned}$$

ואת העובדות $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$.)

(ב) פתור את המשוואה הדיפרנציאלית (מסדר ראשון) הנוצרת עבור $\mathcal{L}[J_0]$, כדי להסיק

$$\mathcal{L}[J_0](s) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

(ג) (בונוס) הוכח שלכל f רציפה על $[0,\infty)$ ובעלת גידול אקספוננציאלי (כלומר, קיימים $\alpha \in \mathbb{R}$ ו־$C > 0$ כך שמתקיים $|f(x)| \leq Ce^{\alpha x}$) , מתקיים

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = f(0)$$

הסק שהקבוע $C = 1$ בסעיף (ב), ולכן

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

בהצלחה רבה!

בחינה סופית במשוואות דיפרנציאליות רגילות — 88-240
מועד ב' תשע"ו

<u>מרצה</u>: ד"ר שמעון ברוקס
<u>משך הבחינה</u>: 2.5 שעות
<u>חומר עזר</u>: ניתן להשתמש במחשבון כיס ובכל חומר עזר

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. רקטה מואצת ע"י פליטת חלק מהמסה שלה (בדר"כ בצורת גז) אחורנית במהירות גבוהה. "משוואת הרקטה" אומרת שאם הגז תמיד נפלט במהירות של $4,500$ מטר-לשניה (יחסית לרקטה), אזי מהירות הרקטה והמסה שלה (המשתנה!) קשורים דרך המשוואה הדיפרנציאלית

$$m\frac{dv}{dm} = -4,500$$

כאשר m היא מסת הרקטה בזמן כלשהוא, ו-v מהירות הרקטה באותו זמן, כפונקציה של המסה.

(א) פתור את המשוואה הדיפרנציאלית למהירות $v(m)$ כפונקציה של המסה.

(ב) אם הרקטה מתחילה ממנוחה במסה של 200 ק"ג (כלומר $v(200) = 0$), מה תהיה מהירות הרקטה $v(100)$ לאחר ניצול חצי מהמסה שלה?

.2

(א) **טעינת קבל.** במעגל חשמלי הבנוי מסוללה $10V$, נגד 100Ω, וקבל $100\mu F$, המטען על הקבל $Q(t)$ פותר את המשוואה

$$100Q'(t) + 10^{-4}Q(t) = 10$$

פתרו את המשוואה עבור תנאי ההתחלה $Q(0) = 0$ (קבל פרוק). חשב את המטען הגבולי

$$Q_{\max} = \lim_{t\to\infty} Q(t)$$

מהו הזרם הגבולי $\lim_{t\to\infty} Q'(t)$?

(ב) **פריקת קבל.** אם מנתקים את הסוללה מהמעגל ומחברים רק את הקבל והנגד, המטען על הקבל $Q(t)$ יפתור את המשוואה

$$100Q'(t) + 10^{-4}Q(t) = 0$$

פתרו משוואה זו עבור תנאי ההתחלה $Q(0) = Q_{\max}$, המטען הגבולי שחשבתם בסעיף הקודם (קבל טעון).

.3

(א) הראה שהפונקציה $y(x) = e^{x^2}$ פותרת את המשוואה

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = 0$$

(ב) מצא את הפתרון הכללי למשוואה הנ"ל.

(ג) מצא את הפתרון הכללי למשוואה האי־הומוגני.

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = x^2 e^{-2x^2}$$

.4

(א) יהי $a > b > 0$. הוכח שכל פתרון $y_1(t), y_2(t)$ למערכת

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -ay_1(t) + by_2(t) \\ y_2'(t) &= by_1(t) - ay_2(t) \end{aligned}$$

מקיים $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \lim_{t\to\infty} y_2(t) = 0$.

(**רמז**: המטריצה $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ סימטרית, ולכן יש לה ערכים עצמיים ממשיים. האם ניתן לאבחן אם הם חיוביים או שליליים?)

(ב) האם זה נכון גם כאשר $b > a$? הסבר!

.5 תהי

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y$$

כאשר $\lambda \in \mathbb{R}$ הוא פרמטר קבוע.

(א) מצא פתרון אחד למשוואה בצורת טור (מספיק להגדיר את המקדמים בצורה רקורסיבית).

(ב) הוכח שעבור $\lambda \in \mathbb{N}$, קיים פתרון שהוא פולינום מדרגה λ.
(פולינומים אלה נקראים "פולינומי לגר", והם מופיעים בפתרונות משוואת שרודינגר בפיזיקה.)

(ג) חשב את הפולינומים האלו עבור $\lambda = 1, 2, 3$.

6. תהי $f \in C^1(0,\infty)$ (כלומר, גזירה ברציפות על $(0,\infty)$), ובעלת גידול אקספוננציאלי (דהיינו, קיימים $\alpha \in \mathbb{R}$ ו־$C > 0$ כך ש: $|f(x)| \leq Ce^{\alpha x}$ על $(0,\infty)$).
נתון גם כי $f(0) = 0$.

(א) (7 נקודות) הוכח שפונקציה $y(x)$ פותר את בעיית הערך ההתחלתי

$$\begin{aligned} y^{(n)} - y &= f'(x) - f(x) \\ y^{(n-1)}(0) = y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) &= 0 \end{aligned}$$

אם ורק אם הוא פותר גם את בעיית הערך ההתחלתי

$$\begin{aligned} y^{(n-1)} + y^{(n-2)} + \cdots + y' + y &= f(x) \\ y^{(n-2)}(0) = y^{(n-3)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) &= 0 \end{aligned}$$

(**רמז**: התמרת לפלס עשויה לעזור פה, יחד עם העובדה האלגברית $s^n - 1 = (s-1)(s^{n-1} + s^{n-2} + \cdots + s + 1)$).

(ב) מצא פתרון פרטי אחד (כלשהו) למשוואה

$$y'' - y = e^x \cos(e^x - 1) - \sin(e^x - 1)$$

בהצלחה רבה!

משוואות דיפרנציאליות רגילות — 88-240

פתרון מבחן מועד א' תשע"ו

מרצה: ד"ר שמעון ברוקס
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: ניתן להשתמש במחשבון כיס ובכל חומר עזר

ענו על 5 מתוך 6 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

1. חללית ממריאה מכוכב לכת במהירות התחלתית v_0. נניח שהחללית מתרחקת בקו ישר מכוכב הלכת, והכח היחיד המופעל על החללית הוא כח משיכה; תנועת החללית מתוארת ע"י המשוואה

$$\frac{dv}{dr} \cdot v(r) = -10^{13} \cdot \frac{1}{r^2}$$

כאשר v היא מהירות החללית, כפונקציה של המרחק r ממרכז כוכב הלכת.

(א) פתור את המשוואה בהינתן מהירות התחלתית v_0. נניח שרדיוס כוכב הלכת הוא 10^6 מטר, כך שתנאי ההתחלה הוא

$$v(10^6) = v_0$$

(ב) חשב את "מהירות הבריחה"— המהירות ההתחלתית המיוחדת v_0, כך שהפתרון יקיים $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$. (זאת המהירות ההתחלתית הדרושה לברוח מכח המשיכה של כוכב הלכת.)

(ג) הראה שכל פתרון למשוואה משמר את האנרגיה

$$E(r) = \frac{1}{2}[v(r)]^2 - \frac{10^{13}}{r}$$

כלומר, שלכל פתרון של המשוואה מתקיים $\frac{dE}{dr} \equiv 0$ זהותית לכל r. מהי האנרגיה המתקבלת עבור תנאי ההתחלה בסעיף (ב)?

פתרון:

(א) משוואה זו ניתנת להפרדה:

$$\begin{aligned} v(r)dv &= -10^{13}\cdot\frac{1}{r^2}dr \\ \int vdv &= -10^{13}\int\frac{dr}{r^2} \\ \frac{1}{2}v^2 &= 10^{13}\frac{1}{r}+C \\ v^2 &= \frac{2\cdot10^{13}}{r}+C \\ v &= \sqrt{\frac{2\cdot10^{13}}{r}+C} \end{aligned}$$

עכשיו נבטא את הקבוע C (ואז את הפתרון) באמצעות תנאי ההתחלה הנתון $v(10^6)=v_0$. נחשב

$$\begin{aligned} v_0=v(10^6) &= \sqrt{\frac{2\cdot10^{13}}{10^6}+C} \\ &= \sqrt{2\cdot10^7+C} \\ v_0^2 &= 2\cdot10^7+C \\ C &= v_0^2-2\cdot10^7 \end{aligned}$$

נציב חזרה בפתרון כדי לקבל את התשובה הסופית

$$v(r)=\sqrt{\frac{2\cdot10^{13}}{r}+v_0^2-2\cdot10^7}$$

(ב) עכשיו נתון עבור פתרון פרטי שמתקיים הגבול $\lim_{r\to\infty}v(r)=0$. נחשב את הגבול

$$\begin{aligned} 0=\lim_{r\to\infty}v(r) &= \lim_{r\to\infty}\sqrt{\frac{2\cdot10^{13}}{r}+v_0^2-2\cdot10^7} \\ &= \sqrt{v_0^2-2\cdot10^7} \\ v_0^2 &= 2\cdot10^7 \\ v_0 &= \sqrt{2\cdot10^7} \end{aligned}$$

היא מהירות הבריחה.

(ג) ישנם כמה אפשרויות פה. ניתן להציב את הפתרון שלנו מסעיף א' ולגזור את הכל כפונקציה של r... זה קצת ארוך ופחות מומלץ, אבל אפשרי וזה יעבוד.

הדרך הקצרה ביותר הוא לגזור ישירות את הביטוי של האנרגיה

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dr} &= \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2}v(r)^2 - \frac{10^{13}}{r}\right] \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2v(r)\cdot v'(r) - \left(-\frac{10^{13}}{r^2}\right) \\
&= \frac{dv}{dr}\cdot v(r) + \frac{10^{13}}{r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

לפי המשוואה המקורית, ולכן האנרגיה נשמרת עבור כל פתרון למשוואה. כדי לחשב את האנרגיה לפתרון הפרטי של מהירות בריחה מסעיף א', ניתן לבחור משתי אופציות עיקריות. אחד הוא להציב את תנאי ההתחלה מסעיף ב' $v(10^6) = \sqrt{2\cdot 10^7}$ ישירות בתוך האנרגיה, ונקבל

$$\begin{aligned}
E = E(10^6) &= \frac{1}{2}v(10^6)^2 - \frac{10^{13}}{10^6} \\
&= \frac{1}{2}(2\cdot 10^7) - 10^7 = 0
\end{aligned}$$

דרך נחמדה (וקצת יותר קצרה) היא להשתמש בעובדה שהאנרגיה נשמרת, ולכן אין חובה לחשב את האנרגיה בנקודת ההתחלה $r = 10^6$, אפשר לחשב ביתר קלות את הגבול כאשר $r \to \infty$:

$$\begin{aligned}
E = \lim_{r\to\infty} E(r) &= \frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} v(r)^2 - \lim_{r\to\infty}\frac{10^{13}}{r} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 = 0
\end{aligned}$$

לפי התנאי $\lim_{r\to\infty} v(r) = 0$ המגדיר את הפתרון הפרטי של מהירות בריחה.

2. תהי

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

משוואה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

(א) <u>הוכח</u>: קיים פולינום מסדר k שפותר את המשוואה אם ורק אם **כל** פולינום מסדר k פותר אותה.

(ב) מה התנאים על המקדמים $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ כך שפולינום מסדר k יפתור את המשוואה?

(ג) האם זה נכון גם עבור משוואה אי־הומוגנית

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

והאם זה תלוי בפונקציה $f(x)$? הסבר!

הרבה וותרו על שאלה זו, למרות שלעניות דעתי, מדובר בשאלה די קלה!

פתרון:

(א) מדובר במשוואה $Ly = 0$ כאשר L הינו אופרטור דיפרנציאלי בעל מקדמים קבועים, ולכן מתפרק כפולינום באופרטור הגזירה D לגורמים ליניאריים וריבועיים אי־פריקים. פולינום מדרגה k מושמדת ע"י האופרטור D^{k+1}, ולא נמצא בגרעין של אף אופרטור אחר עם מקדמים קבועים, אשר לא מתחלק ב־D^{k+1}. לכן, בהכרח האופרטור L הוא מהצורה

$$L = \tilde{L} \cdot D^{k+1}$$

כאשר $\tilde{L}$ הוא אופרטור (אחר) עם מקדמים קבועים. היות ו־D^{k+1} משמיד **כל** פולינום מדרגה k, נובע שכל פולינום מדרגה k מושמד ע"י L, ולכן מקיים את המשוואה.

(ב) כאמור, זה מחייב שהאופרטור

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = \tilde{L} \cdot D^{k+1}$$

או לחילופין, שהפולינום האופייני יהיה מהצורה

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = P(\lambda) \cdot \lambda^{k+1}$$

כאשר $P(\lambda)$ הוא פולינום אחר (הפולינום האופייני של $\tilde{L}$). זאת אומרת שכל המקדמים

$$a_0, a_1, \ldots, a_k = 0$$

חייבים להתאפס. מאידך, אם כל המקדמים האלה מ־a_0 עד a_k מתאפסים, אז הפולינום האופייני מתחלק ב־λ^{k+1} וכאמור כל פולינום מדרגה k מושמדת.

אז התשובה היא, שפולינום מסדר k פותר את המשוואה אם ורק אם

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_k = 0$$

דרך נוספת לפתור (ובכך גם לפתור את סעיף א') היא בצורה אינדוקטיבית. אם נציב עבור y במשוואה פולינום מדרגה k, אזי $y^{(k+1)} = 0$ וגם כל הנגזרות הגבוהות מ־$k+1$, ולכן אנו נשארים אם המשוואה

$$a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

עכשיו נשים לב, כי סכום כל האיברים חוץ מהאחרון $a_0 y$ — כלומר, הביטוי $a_k y^{(k)} + a_{k-1} y^{(k-1)} + \cdots + a_1 y'$ — הוא פולינום מדרגה לכל היותר $k-1$, ואילו אם $a_0 \neq 0$, האיבר $a_0 y$ הוא פולינום מדרגה k, ולכן הסכום באגף השמאלי יהיה בהכרח פולינום מדרגה k ולא יכול להתאפס, מה שסותר את

העובדה כי y פותר את המשוואה. לכן, בהכרח $a_0 = 0$. אבל עכשיו, מאותה סיבה, אם $a_1 \neq 0$ אז $a_1 y'$ יהיה פולינום מדרגה $k-1$, ואילו סכום האחרים הוא פולינום מדרגה לכל היותר $k-2$, ושוב מוביל לסתירה. בצורה אינדוקטיבית, מוכיחים שכל המקדמים $a_0, a_1, \ldots, a_k$ חייבים להתאפס. (שוב, כאמור לעיל, קל להוכיח שאם כל המקדמים האלה מתאפסים, אז כל פולינום מדרגה k פותר.)
(ג) אם $f(x)$ אינו פולינום, אזי אף פולינום לא יכול לפתור את המשוואה (מכל דרגה שהיא), היות ואגף שמאל Ly חייב להיות פולינום כל עוד y הוא פולינום ו־L הוא אופרטור עם מקדמים קבועים. אם f הוא פולינום, אז בהכרח יהיה פתרון פרטי למשוואה שהוא פולינום מסדר מסויים k, ושפולינום אחר מאותה דרגה לא יפתור את המשוואה. זאת מכיוון שאם $f(x)$ הוא פולינום מסדר m והאופרטור L מתחלק ב־D^p ולא ב־D^{p+1}, אזי קיים פתרון פרטי y שנמצא בגרעין של D^{p+m+1} אך לא בגרעין של D^p. אבל אז $2y$ — שהוא פולינום מאותה דרגה של y— לא יוכל לפתור את המשוואה האי־הומוגנית, כי אם כך ההפרש $2y - y = y$ יפתור את המשוואה ההומוגנית (לפי המשפט שלמדנו: כל הפרש בין שני פתרונות למשוואה אי־הומוגנית פותר את המשוואה ההומוגנית הקשורה) וזה סותר את העובדה ש־y מסדר $p+m$ לא נמצא בגרעין של L שלא מתחלק ב־D^{p+1}.

3. הפונקציות ה**טריגונומטריות ההיפרבוליות** מוגדרות על ידי

$$\begin{aligned} \cosh(x) &= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \\ \sinh(x) &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} \end{aligned}$$

(א) הראה את הזהויות

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\cosh(x) &= \sinh(x) \\ \frac{d}{dx}\sinh(x) &= \cosh(x) \end{aligned}$$

(ב) הראה כי כל זוג פונקציות $(f(x), g(x))$ המקיים

$$\begin{aligned} f'(x) &= g(x) \\ g'(x) &= f(x) \end{aligned}$$

הם צירופים ליניאריים של e^x ו־e^{-x} (ובכך צירופים ליניאריים של $\sinh(x)$ ו־$\cosh(x)$).

(ג) הראה כי כל זוג פונקציות $(a(x), b(x))$ המקיים

$$\begin{aligned} a'(x) &= b(x) \\ b'(x) &= -a(x) \end{aligned}$$

הם צירופים ליניאריים של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$.

פתרון:
(א) שאלת מתנה, חישוב פשוט—

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\cosh(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}(-e^{-x}) = \sinh(x) \\
\frac{d}{dx}\sinh(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}(-e^{-x}) \\
&= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = \cosh(x)
\end{aligned}$$

(ב) שתי גישות קבילות. הראשונה היא לכתוב בתור מערכת של משוואות ליניאריות מסדר ראשון עם מקדמים קבועים:

$$\begin{pmatrix} f' \\ g' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

ולחשב את הפולינום האופייני של המטריצה

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

עם שורשים $\lambda = \pm 1$. אפשר גם לחשב בקלות ווקטורים עצמיים

$$\begin{aligned}
v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
v_{-1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי למערכת הוא

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}$$

שהם צירופים ליניאריים של e^x ו־e^{-x} (ובכך גם צירופים ליניאריים של $\cosh(x)$ ו־$\sinh(x)$).
הדרך השנייה היא לזהות שמערכת זו גם שקולה למשוואה

$$f'' = f$$

מסדר 2, שהיא בעלת אותה פולינום אופייני כמובן, ולכן הפתרון הכללי שלה הוא

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

ולכן נובע גם

$$g(x) = f'(x) = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}$$

המסכים עם התשובה הקודמת (רק עוקף את האלגברה הליניארית בחישוב הווקטורים העצמיים של המטריצה...)
(ג) כמעט זהה לשאלה הקודמת, רק כאן המערכת היא

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

בעלת פולינום אופייני

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

עם שורשים $\lambda = \pm i$, עם ווקטורים עצמיים

$$\begin{aligned} v_i &= \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_{-i} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי מעל המרוכבים יהיה

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{ix} + C_2 \overline{\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} e^{ix}}$$

אם נפריד חלק ממשי וחלק מדומה נקבל

$$\begin{aligned} Re \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= Re \begin{pmatrix} ie^{ix} \\ -e^{ix} \end{pmatrix} = Re \begin{pmatrix} i\cos(x) - \sin(x) \\ -\cos(x) - i\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} \\ Im \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= Im \begin{pmatrix} ie^{ix} \\ -e^{ix} \end{pmatrix} = Im \begin{pmatrix} i\cos(x) - \sin(x) \\ -\cos(x) - i\sin(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן הפתרון הכללי הממשי הוא

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \end{pmatrix}$$

שהם צירופים ליניאריים של $\sin(x)$ ו־$\cos(x)$.
כמו בסעיף קודם, אפשר גם לזהות שמדובר במערכת השקולה למשוואה

$$a'' = -a$$

מסדר 2, בעלת אותו פולינום אופייני כמובן עם שורשים $\lambda = \pm i$, ולכן הפתרון הכללי הוא

$$a(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

ומכאן נובע

$$b(x) = a'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$$

המסכים עם התשובה הקודמת (ע"י ההצבה $A = C_2$, $B = -C_1$).

.4

(א) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x}y_1 \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{x}y_2 \end{aligned}$$

(ב) מצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{x}y_1 + 3x \\ y_2' &= y_1 + \frac{1}{x}y_2 + x^2 \end{aligned}$$

פתרון:
(א) יש (לפחות) 2 דרכים לפתור. דרך ראשונה היא לזהות שהמשוואה הראשונה תלויה רק ב־y_1 ולא מכילה את y_2, לכן ניתן לפתור אותה קודם לבדה— מדובר על משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון, ניתן לפתור בקלות דרך הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -\frac{1}{x}y_1 \\ \frac{dy_1}{y_1} &= -\frac{dx}{x} \\ \int \frac{dy_1}{y_1} &= -\int \frac{dx}{x} \\ \ln(y_1) &= -\ln(x) + C = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C \\ y_1(x) &= K\frac{1}{x} \end{aligned}$$

עכשיו ניתן להציב פתרון זה במשוואה השנייה, ולקבל משוואה מסדר ראשון ליניארית ב־y_2 :

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1 + \frac{1}{x}y_2 \\ y_2' - \frac{1}{x}y_2 &= K\frac{1}{x} \\ \frac{1}{x}y_2' - \frac{1}{x^2}y_2 &= \frac{K}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x}\cdot y_2\right)' &= \frac{K}{x^2} \\ \frac{1}{x}\cdot y_2 &= \int \frac{K}{x^2}dx = -\frac{K}{x} + C \\ y_2(x) &= -K + Cx \end{aligned}$$

ומקבלים את הפתרון הכללי שלנו

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{K}{x} \\ y_2(x) &= -K + Cx \end{aligned}$$

עבור קבועים שרירותיים $C, K \in \mathbb{R}$. פה השתמשנו בשיטת גורם האינטגרציה

$$I(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln(1/x)} = \frac{1}{x}$$

כדי לפתור את המשוואה הליניארית מסדר ראשון עבור y_2; כמובן אפשר גם דרך וריאציית מקדמים מהפתרון ההומוגני $y_{2,h}(x) = Cx$ (דרך הפרדת משתנים, לדוגמא) והצבת צורת הפתרון $y_2(x) = C(x)\cdot x$ במשוואה

$$\begin{aligned} y_2' &= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}y_2 \\ C'(x)\cdot x + C(x) &= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\cdot C(x)x = \frac{K}{x} + C(x) \\ C'(x)\cdot x &= \frac{K}{x} \\ C'(x) &= \frac{K}{x^2} \\ C(x) &= -\frac{K}{x} + \tilde{C} \end{aligned}$$

המוביל לפתרון

$$y_2(x) = C(x)\cdot x = \left(-\frac{K}{x} + \tilde{C}\right)x = -K + \tilde{C}x$$

בהסכמה עם הפתרון הנ"ל.
דרך שניה היא לזהות בגלל ההומוגניות ש־$y_1(x) = 0$ פותר את המשוואה

הראשונה, והצבתה במשוואה השניה נותן משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון (הניתנת להפרדה) עבור y_2, המובילה לפתרון פרטי

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 0 \\ y_2(x) &= x \end{aligned}$$

עכשיו כתיבת המערכת בניסוח מטריציוני

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

מראה כי עקבת המטריצה $Tr \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & 0 \\ 1 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} = 0$ מתאפסת, וניתן להעזר במשפט ליוביל כדי להגיע לפתרון כללי. אם נציב

$$D = \begin{vmatrix} 0 & y_1 \\ x & y_2 \end{vmatrix} = -x \cdot y_1$$

משפט ליוביל מבטיח ש־D הוא קבוע, כלומר

$$\begin{aligned} D &= -x \cdot y_1 \\ y_1(x) &= -\frac{D}{x} \end{aligned}$$

כאשר D הוא קבוע (כמו בפתרון הראשון), וניתן להציב במשוואה השניה כדי לפתור עבור y_2 כמו שעשינו לעיל. במקרה זה ליוביל לא נותן יותר מאשר העובדה שניתן לפתור את המשוואה הראשונה לחוד ואז להציב במשוואה השניה, אבל למי שלא זהה את זה מלכתחילה, ליוביל נותן את הדחיפה הדרושה בכיוון הזה.

(ב) לפתירת המערכת האי־הומוגנית ישנם שני דרכים לפתור (מזהים פה עקרון שחוזר על עצמו?). ניתן לבצע וריאציית מקדמים מהפתרונות ההומוגניים (לדוגמא)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/x \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

היוצרים את מטריצת הפתרונות ההומוגניים

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1/x \\ x & -1 \end{pmatrix}$$

ונחשב את היפוכו:

$$Y^{-1} = \frac{1}{\det Y} \begin{pmatrix} -1 & -1/x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

היות והדטרמיננטה היא

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/x \\ x & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) - x \cdot \frac{1}{x} = 0 - 1 = -1$$

לכן הפתרון הכללי $Y\begin{pmatrix}C_1(x)\\C_2(x)\end{pmatrix}$ למשוואה האי־הומוגנית

$$\begin{pmatrix}y_1'(x)\\y_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{x} & 0\\1 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x\\x^2\end{pmatrix}$$

מקיים

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}C_1'(x)\\C_2'(x)\end{pmatrix} &= Y^{-1}\begin{pmatrix}3x\\x^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1/x\\x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3x\\x^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}3x+\frac{1}{x}\cdot x^2\\3x^2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4x\\3x^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

אם פתרונות

$$\begin{aligned}C_1(x) &= \int 4xdx = 2x^2+K_1\\ C_2(x) &= \int 3x^2dx = x^3+K_2\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{pmatrix} &= Y\begin{pmatrix}2x^2+K_1\\x^3+K_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{x}\\x & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x^2+K_1\\x^3+K_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x^2+\frac{K_2}{x}\\2x^3+K_1x-x^3-K_2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x^2+\frac{K_2}{x}\\x^3+K_1x-K_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

דרך שנייה היא לפתור את המשוואה הראשונה $y_1'+\frac{1}{x}y_1=3x$ קודם, כמשוואה ליניארית מסדר ראשון, נניח בשיטת גורם האינטגרציה שבמקרה הזה שווה $I(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\ln(x)}=x$ ולכן מתקבל

$$\begin{aligned}xy_1'+y_1 &= 3x^2\\ (x\cdot y_1)' &= 3x^2\\ xy_1 &= x^3+K_1\\ y_1(x) &= x^2+\frac{K_1}{x}\end{aligned}$$

שתואם לפתרון הנ"ל. עכשיו אפשר להציב פתרון זה במשוואה השנייה ושוב לפתור אותה כמשוואה ליניארית אי־הומוגנית מסדר ראשון

$$\begin{aligned} y_2' &= y_1 + \frac{1}{x} y_2 + x^2 \\ &= x^2 + \frac{K_1}{x} + \frac{1}{x} y_2 + x^2 \\ y_2' - \frac{1}{x} y_2 &= 2x^2 + \frac{K_1}{x} \end{aligned}$$

פה גורם האינטגרציה הוא $I(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{x}$ ומקבלים

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} y_2' - \frac{1}{x^2} y_2 &= 2x + \frac{K_1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x} y_2\right)' &= 2x + \frac{K_1}{x^2} \\ \frac{1}{x} y_2 &= x^2 - \frac{K_1}{x} + K_2 \\ y_2(x) &= x^3 - K_1 + K_2 x \end{aligned}$$

בתיאום עם הפתרון הנ"ל (רק בהחלפת הקבועים K_1, K_2)

הערה: היו כמה שניסו לנחש פתרון פרטי ולחבר לפתרון ההומוגני הכללי. אין אם זה שום בעיה (במיוחד כשדי קל לנחש פתרון פרטי למשוואה הראשונה ואז להציב בשניה), אך אין זה נכון שניתן לנחש פתרון פרטי ע"פ המשמיד של הווקטור $\begin{pmatrix} 3x \\ x^2 \end{pmatrix}$ — הטריק הזה עובד רק כאשר המקדמים הם קבועים, מה שלא נכון פה! ואמנם, הפתרון הפרטי מכיל בתוכו x^3 ואינו מושמד ע"י D^3, המשמיד של הווקטור $\begin{pmatrix} 3x \\ x^2 \end{pmatrix}$.

5. פתור את המשוואה

$$2xy'' + y' + (3 - 2x)y = 0$$

בסביבה של $x = 0$.

פתרון:

קודם כל, אנחנו מזהים שהמקדמים אנליטיים, אך בכדי לסווג את הנקודה $x = 0$ צריך להביא את המשוואה לצורה הנורמאלית

$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{3 - 2x}{2x} y = 0$$

עכשיו המקדמים אינם אנליטיים ב־0, אבל בכל זאת הנקודה $x = 0$ היא סינגולרית־רגולרית, היות והמקדמים המתואמים

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{1}{2x} &= \frac{1}{2} \\ x^2 \cdot \frac{3-2x}{2x} &= \frac{3}{2}x - x^2 \end{aligned}$$

הם אנליטיים בסביבה של $x = 0$. לכן נוכל להשתמש בשיטת פרוביניוס לפתירת המשוואה ע"י טורים.
נציב כרגיל

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} \end{aligned}$$

נציב במשוואה כדי לקבל

$$\begin{aligned} 0 &= 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1) a_n x^{n+\alpha-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1} + (3-2x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+\alpha)(n+\alpha-1) + (n+\alpha)\right] a_n x^{n+\alpha-1} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha+1} \\ &= \left[2\alpha(\alpha-1) + \alpha\right] a_0 x^{\alpha-1} + \left([2(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1)]a_1 + 3a_0\right) x^{\alpha} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \left([2(n+\alpha+2)(n+\alpha+1) + (n+\alpha+2)]a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n\right) x^{n+\alpha+1} \end{aligned}$$

משוואת האינדקס נובעת ממקדם האיבר $x^{\alpha-1}$ בעל החזקה הנמוכה ביותר (וההנחה $a_0 \neq 0$)

$$0 = 2\alpha(\alpha-1) + \alpha = 2\alpha^2 - \alpha = \alpha(2\alpha - 1)$$

ששורשיו $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \frac{1}{2}$. ההפרש $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}$ אינו מספר שלם, ולכן יהיו שני פתרונות בל"ת ליניארית, אחד עבור כל אחת מהאלפות.
קודם נחשב עבור $\alpha_1 = 0$. (שים לב שפתרון זה אנליטי בסביבה של $x = 0$, למרות שהנקודה סינגולרית...). מהמקדם השני בגודלו $x^{\alpha} = x^0$ נקבל את המשוואה

$$\begin{aligned} 0 &= \left[2(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1)\right] a_1 + 3a_0 \\ &= [2 \cdot 1 \cdot 0 + 1]a_1 + 3a_0 = a_1 + 3a_0 \\ a_1 &= -3a_0 \end{aligned}$$

עבור האיברים x^{n+1} כאשר $n \geq 0$, נקבל את משוואת הרקורסיה הכללית

$$\begin{aligned} 0 &= \left[2(n+2)(n+1) + (n+2)\right] a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n \\ &= (n+2)(2n+3)a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n \\ a_{n+2} &= \frac{2a_n - 3a_{n+1}}{(n+2)(2n+3)} \end{aligned}$$

המגדירה את המקדמים של טור הפתרון $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
עבור $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, נציב במשוואה של מקדם $x^{\alpha} = x^{1/2}$ ונקבל

$$\begin{aligned} 0 &= [2(\alpha+1)\alpha + (\alpha+1)]\, a_1 + 3a_0 \\ &= [2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2}]a_1 + 3a_0 \\ &= 3a_1 + 3a_0 \\ a_1 &= -a_0 \end{aligned}$$

עבור $x^{n+\frac{3}{2}}$ כאשר $n \geq 0$, נקבל את משוואת הרקורסיה

$$\begin{aligned} 0 &= [2(n+2.5)(n+1.5) + (n+2.5)]a_{n+2} + 3a_{n+1} - 2a_n \\ &= (n+2.5)(2n+4)a_{n+2} + 3a_{n-1} - 2a_n \\ a_{n+2} &= \frac{2a_n - 3a_{n-1}}{(2n+5)(n+2)} \end{aligned}$$

המגדירה את המקדמים לפתרון השני $y_2(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
בהינתן הרקורסיות המגדירות את המקדמים של הטורים y_1 ו־y_2, הפתרון הכללי למשוואה היא

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

(או $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ כאשר החופשיות בבחירת הקבוע נכללת במקדמים a_0 של כל אחד מהטורים....)

6. מטרת התרגיל לחשב התמרת לפלס של $J_0(x)$ (פונקציית בסל מסדר 0).

(א) זכרו כי J_0 פותר את משוואת בסל מסדר 0

$$x^2 J_0'' + x J_0' + x^2 J_0 = 0$$

נחלק ב־x כדי להביא אותו לצורה

$$x J_0'' + J_0' + x J_0 = 0$$

הפעל התמרת לפלס על שני האגפים. (זכרו את התכונות

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y'](s) &= s\mathcal{L}[y] - y(0) \\ \mathcal{L}[y''](s) &= s^2 \mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) \\ \mathcal{L}[xy](s) &= -\frac{d\mathcal{L}[y]}{ds} \end{aligned}$$

ואת העובדות $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$.)

(ב) פתור את המשוואה הדיפרנציאלית (מסדר ראשון) הנוצרת עבור $\mathcal{L}[J_0]$, כדי להסיק

$$\mathcal{L}[J_0](s) = C \cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

(ג) (בונוס) הוכח שלכל f רציפה על $[0,\infty)$ ובעלת גידול אקספוננציאלי (כלומר, קיימים $\alpha \in \mathbb{R}$ ו־$C>0$ כך שמתקיים $|f(x)| \le Ce^{\alpha x}$) , מתקיים

$$\lim_{s\to\infty} s\cdot \mathcal{L}[f](s) = f(0)$$

הסק שהקבוע $C=1$ בסעיף (ב), ולכן

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

פתרון:

(א) אנחנו רוצים להפעיל התמרת לפלס על המשוואה

$$xJ_0'' + J_0' + xJ_0 = 0$$

הכל נתון בצורה ישירה מהתכונות הנתונות, חוץ מהתמרת לפלס של האיבר הראשון xJ_0'', שנחשב כעת. לצורך פשטות, נסמן $\mathcal{L}[J_0](s) = Y(s)$. אז לפי התכונות הנתונות, נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[xJ_0''](s) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[J_0''](s) \\
&= -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - sJ_0(0) - J_0'(0)\right) \\
&= -\frac{d}{ds}\left(s^2Y(s) - s - 0\right) \\
&= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1
\end{aligned}$$

לפי הנתונים $J_0(0)=1, J_0'(0)=0$ וכלל לייבניץ לגזירת המכפלה $s^2Y(s)$.
עכשיו נחבר הכל ביחד ונקבל

$$\begin{aligned}
0 &= \mathcal{L}[xJ_0''](s) + \mathcal{L}[J_0'](s) + \mathcal{L}[xJ_0](s) \\
&= \left[-s^2Y'(s) - 2sY(s) + 1\right] + [sY(s) - 1] - \frac{d}{ds}Y(s) \\
&= (-s^2-1)Y'(s) - sY(s)
\end{aligned}$$

שהיא המשוואה הדיפרנציאלית מסדר ראשון הדרושה.
(ב)משוואה זו ליניארית הומוגנית מסדר ראשון וניתנת להפרדה:

$$\begin{aligned}
(s^2+1)Y'(s) &= -sY(s) \\
\frac{Y'(s)}{Y(s)} &= \frac{-s}{s^2+1} \\
\int \frac{dY}{Y} &= -\frac{1}{2}\int \frac{2s}{s^2+1}ds \\
\ln(Y) &= -\frac{1}{2}\ln(s^2+1) + C = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) + C \\
Y(s) &= \tilde{C}\cdot \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}
\end{aligned}$$

כנדרש.

(ג) כאן נפלה טעות בשאלון המבחן— היה חסר s הכופל את $\mathcal{L}[f](s)$ בתוך הגבול (קל לראות, כפי שחלקיכם ציינתם, שעבור כל f רציפה בעלת גידול אקספוננציאלי הגבול $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}[f](s)=0$).

הרעיון האינטואיטיבי הוא כך: ככל ש־s גדל, הפונקציה $e^{-sx}f(x)$ דועכת מהר ומהר יותר, ולכן האינטגרל המגדיר את התמרת לפלס

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

מתרכזת יותר ויותר על ערכים של $f(x)$ הקרובים ל־$x=0$, וההשפעה של e^{-sx} משמידה את התרומה לאינטגרל של $f(x)$ בנקודות $x>0$. ניתן לעשות פה חשבונות כאלו ואחרות עם אפסילונים למיניהם: נגיד, לפרק את האינטגרל

$$\mathcal{L}[f](s)=\int_0^\epsilon e^{-sx}f(x)dx+\int_\epsilon^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ואז האינטגרל השני דועך בצורה אקספוננציאלית כך ש:

$$\begin{aligned}\left|s\int_\epsilon^\infty e^{-sx}f(x)dx\right| &\leq s\cdot\sup(f)\cdot\int_\epsilon^\infty e^{-sx}dx\\ &\leq \sup(f)\cdot e^{-s\epsilon}\\ &\to 0\end{aligned}$$

כאשר $s\to\infty$, היות והסופרימום $\sup(f)$ חסום ביחס ל־s ו־ϵ. ואז ניתן לחשב לאינטגרל הראשון

$$\begin{aligned}\left|s\int_0^\epsilon e^{-sx}f(x)dx\right| &= sf(0)\int_0^\epsilon e^{-sx}dx+sO(\epsilon^2)\\ &= f(0)-f(0)e^{-s\epsilon}+sO(\epsilon^2)\\ &\to f(0)\end{aligned}$$

אם נבחר, לדוגמא, $\epsilon=s^{-0.75}$.

דרך אחרת, היא להפעיל אינטגרציה לפי חלקים באינטגרל המגדיר את התמרת לפלס:

$$\begin{aligned}s\mathcal{L}[f](s) &= s\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\\ &= s\left(-\frac{1}{s}f(x)e^{-sx}\Big|_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx\right)\\ &= f(0)-0+\int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx\end{aligned}$$

עכשיו, אם f גזירה ברציפות, והנגזרת $f'(x)$ גם היא בעלת גידול אקספוננציאלי, אזי האינטגרל השני שואף ל־0 כאשר $s\to\infty$. אבל בכללי, אין שום הבטחה שהנגזרת אכן בעלת גידול אקספוננציאלי! (ולמען האמת, גם אין הבטחה ש־f גזירה...) ניתן לטפל בבעיה זו שוב ע"י חלוקת האינטגרל לשניים, כך

שהאינטגרציה לפי חלקים מתבצע על קטע סגור ולא על קטע אינסופי, כאשר החלק האינסופי של האינטגרל ממילא מתאפס בגבול $s \to \infty$ כפי שראינו לעיל. על קטע סגור, תמיד ניתן לקרב פונקציה רציפה ע"י סדרה של פונקציות גזירות המתכנסת אליה במידה שווה (אפילו סדרה של פולינומים– משפט של ויירשטראס) ולהפעיל אינטגרציה לפי חלקים כמתואר לעיל.
בכל מקרה, נקבל את הגבול

$$\lim_{s\to\infty} s\mathcal{L}[f](s) = f(0)$$

ובמקרה שלנו עבור J_0, נקבל

$$\begin{aligned} 1 = J_0(0) &= \lim_{s\to\infty} s\cdot\mathcal{L}[J_0](s) \\ &= \lim_{s\to\infty} s\cdot C\cdot\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \\ &= C\cdot\lim_{s\to\infty}\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = C \end{aligned}$$

ולכן $C = 1$, ומקבלים את התשובה הסופית

$$\mathcal{L}[J_0](s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$