תרגול 2 בדידה להנדסה

21 בינואר 2015

<u>תרגיל:</u>

מהי טבלת האמת של הביטוי $(A \to B) \wedge (\neg A \to B)$?

<u>פתרון:</u>

נחשב את ערכי האמת של הביטוי שלב־שלב:

A	B	$\neg A$	$A \to B$	$\neg A \to B$	$(A \to B) \wedge (\neg A \to B)$
1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0

<u>תרגיל:</u>

האם הביטויים הבאים שקולים?

1. $(A \wedge B) \to A \equiv A \to (B \to A)$.
2. $A \wedge \neg(B \vee C) \equiv (A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg C)$.

<u>פתרון:</u>

1. נבדוק בעזרת טבלת אמת:

A	B	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \to A$	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

שני הפסוקים מקבלים את אותם הערכים ולכן שקולים.

2. שוב, נבדוק בעזרת טבלת אמת:

A	B	C	$\neg B$	$\neg C$	$B \vee C$	$\neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg(B \vee C)$	$A \wedge \neg B$	$A \wedge \neg C$	$(A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg C)$
0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0

לכן לפסוקים שלנו יש אותם ערכים לוגיים ולכן הם שקולים.

*אם ערך האמת של פסוק הוא תמיד 1 (כלומר הוא תמיד נכון), נאמר שהוא טאוטולוגיה.

אם ערך האמת של פסוק הוא תמיד 0 (כלומר הוא תמיד לא נכון), נאמר שהוא סתירה.

<u>תרגיל:</u>

הצרינו את הטענה הבאות כפסוקים:

1. לכל איש יש שם.
2. אם קיים איש עם שם יחיד אז לא קיים איש ללא שם.

<u>פתרון:</u>

כדי להצרין את הטענות, נגדיר את x להיות משתנה הנלקח מקבוצת האנשים, את Y להיות הפרדיקט שאומר "שם", כלומר $Y(x)$ אומר "שם של" x.

בנוסף, $\exists!$ פירושו קיים יחיד. כעת:

1. $\forall x \exists Y : Y(x)$
2. $\exists x \exists! Y : Y(x) \to \neg\exists x : \forall Y \neg Y(x)$

נקודותיים בהצרנה פירושן "כך ש". נשתמש בהן הרבה כשמדובר בפרדיקטים.

הוכחה בשלילה:

הוכחה בשלילה היא אחד מהכלים הלוגיים החזרים ביותר במתמטיקה.

ניזכר בשקילות הבאה: $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$.

לכן, אם נרצה להוכיח שא' גורר ב', מספיק להוכיח שלא ב' גורר לא א'.

הוכחה בשלילה היא וריאציה של שקילות זו.

אנו נניח שמה שאנו רוצים להוכיח **אינו** נכון, ונגיע לסתירה. לכן, מה שהנחנו הוא לא נכון. אם כן, קבילנו שמה רצינו להוכיח כנכון הוא לא לא נכון, ולכן הוא נכון.

<u>לדוגמה:</u>

הוכיחו שקיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>פתרון:</u>

נרצה להוכיח בשלילה. אם כן, נניח בשלילה שאין אינסוף ראשוניים, כלומר יש מספר סופי של ראשוניים.

נסמנם ב־$P_1, P_2, \ldots, P_n$. אין יותר ראשוניים חוץ מאלו שברשימה שלנו.

כעת, נרצה להגיע לסתירה, לתוצאה שסותרת את מה שידוע לנו כרגע.

נבנה מספר חדש:

$$S = P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_n + 1$$

אנו יודעים שכל מספר ניתן לפירוק למכפלת מספרים ראשוניים.

כעת, אם S שלנו הוא ראשוני, מצאנו מספר חדש שאינו ברשימה שלנו, וזו סתירה לכך שברשימה שלנו נמצאים כל הראשוניים ואין עוד מלבדם!

אם S שלנו אינו ראשוני, יש מספר ראשוני P שמחלק אותו. אלא מאי, מדרך הבנייה שלנו את S נקבל שאף מספר ראשוני P_i מהרשימה שלנו מחלק את S (הוספת ה-1 גורמת לכך).

לכן, הראשוני הזה P שמחלק את S לא נמצא ברשימה שלנו, ומצאנו מספר ראשוני שאינו ברשימה שלנו, וזו סתירה!

אם כן אנו מקבלים סתירה בכל מקרה, ולכן ההנחה שלנו בשלילה אינה נכונה.

לכן אין מספר סופי של ראשוניים, כלומר יש אינסוף ראשוניים.

<u>דוגמה נוספת:</u>

הוכיחו ש$-\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה שמה שאנו רוצים להוכיח אינו נכון.

כלומר, נניח בשלילה ש$-\sqrt{2}$ הוא כן רציונלי.

לפי הגדרת המספרים הרציונליים, קיימים שני מספרים $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ ($\in$פירושו "שייך". $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$היא קבוצת המספרים הטבעיים, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1 \pm 2, \dots\}$ היא קבוצת המספרים השלמים) כך שעבורם:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

וזהו שבר מצומצם. כעת, נעלה בריבוע את שני האגפים ונקבל:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

נכפיל את שני האגפים ב$-n^2$ ונקבל:

$$2n^2 = m^2$$

מכאן יוצא, אם כך, ש$-m^2$ הוא מספר זוגי, ולכן גם m הוא מספר זוגי; כלומר, קיים k שלם כך ש$-m = 2k$ ואם נציב זאת במשוואה נקבל:

$$2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ואם נצמצם ב-2:

$$n^2 = 2k^2$$

מאותם שיקולים כמו קודם, נקבל שקיים l שלם כך ש: $n = 2l$. אם כך, השבר שלנו הוא:

$$\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$$

כלומר השבר שלנו אינו שבר מצומצם וסתירה!

לכן ההנחה שלנו אינה נכונה, ולכן $\sqrt{2}$ כן רציונלי.