תרגיל 11 אנליזה הרמונית תש"ף

14 בינואר 2020

1. חשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{2}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\leq0 \end{cases}$$

הפתרון נמצא בתרגול 8 של הטכניון.

2. (מבחן לדוגמה תשע"ט) נתון כי התמרת פורייה של פונקציה $f\left(x\right)$ היא:

$$\widehat{f}\left(\omega\right)=\frac{1}{1+\left|\omega\right|}$$

חשבו את האינטגרל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx$$

פתרון:

לפי הגדרת ההתמרה:

$$\widehat{f}\left(0\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)e^{-i\cdot0\cdot x}dx$$

אצלנו, $\widehat{f}\left(0\right)=1$ ולכן:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)dx=2\pi$$

3. (מבחן תשע"ג) תהי:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-x^{10}} & x>0\\ -e^{-x^{10}} & x\leq0 \end{cases}$$

האם $\widehat{f}\left(\omega\right)$ גזירה?

פתרון:

הפונקציה $xf\left(x\right)$ אינטגרבילית בהחלט. אינטואיטיבית, $e^{-x^{10}}$ חזקה הרבה יותר מה־x המסכן. אם רוצים נימוק יותר פורמלי, את האינטגרל עצמו קשה לחשב, אבל אפשר לומר: $\left|xe^{-x^{10}}\right| \leq \left|xe^{-x}\right|$. את האינטגרל של הפונקציה הימנית אפשר לחשב עם אינטגרציה בחלקים, הוא מתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס. הפונקציה גם רציפה למקוטעין ב־$\mathbb{R}$, ולכן (תכונת ה"מומנט", תרגול 9 של הטכניון, תכונה 3.8 בעמוד 107 בספר) $\widehat{f}$ אכן גזירה.