תורת המספרים האלגברית (88798) תשפ"א
תרגיל 11

1. תהי L/K הרחבת גלואה של שדות, תהי $|\cdot|_w$ הערכה על L, ויהי

$$G_w(L/K) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) : \forall \alpha \in L,\, |\sigma(\alpha)|_w = |\alpha|_w\}.$$

אם ההערכה לא־ארכימדית, יהי $\mathcal{O}_L$ חוג ההערכה של L, יהי $\mathfrak{p}_L$ האידאל המקסימלי שלו, ויהיו

$$\begin{aligned} I_w(L/K) &= \{\sigma \in G_w(L/K) : \forall \alpha \in \mathcal{O}_L,\, \sigma(\alpha) - \alpha \in \mathfrak{p}_L\} \\ P_w(L/K) &= \{\sigma \in G_w(L/K) : \forall \alpha \in L^\times,\, \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} - 1 \in \mathfrak{p}_L\}. \end{aligned}$$

(א) תהיינה L/K ו־ L'/K' שתי הרחבות גלואה, ויהי $\tau : L \hookrightarrow L'$ שיכון שמצטמצם לשיכון $K \hookrightarrow K'$. נגדיר הומומורפיזם $\tau^* : \mathrm{Gal}(L'/K') \to \mathrm{Gal}(L/K)$ על ידי $\tau^*(\sigma') = \tau^{-1} \circ \sigma' \circ \tau$.
תהי w' הערכה של L', תהי v' הערכה של L' ותהי $w = w' \circ \tau$ ההערכה המתאימה של L. הוכח כי

$$\begin{aligned} \tau^*(G_{w'}(L'/K')) &\subseteq G_w(L/K) \\ \tau^*(I_{w'}(L'/K')) &\subseteq I_w(L/K) \\ \tau^*(P_{w'}(L'/K')) &\subseteq P_w(L/K). \end{aligned}$$

(ב) תהי $K \subseteq M \subseteq L$ תת־הרחבה. הוכח כי

$$\begin{aligned} G_w(L/M) &= G_w(L/K) \cap \mathrm{Gal}(L/M) \\ I_w(L/M) &= I_w(L/K) \cap \mathrm{Gal}(L/M) \\ P_w(L/M) &= P_w(L/K) \cap \mathrm{Gal}(L/M). \end{aligned}$$

(ג) תהי L/K הרחבת גלואה סופית ויהי v הצמצום של w ל־ K. הוכח כי

$$\begin{aligned} G_w(L/K) &\simeq \mathrm{Gal}(L_w/K_v) \\ I_w(L/K) &\simeq I(L_w/K_v) \\ P_w(L/K) &\simeq P(L_w/K_v), \end{aligned}$$

כאשר באגף הימין מגדירים את החבורות ביחס להערכה הטבעית של L_w ולכן משמיטים את האינדקס.
רמז: הוכח קודם כי $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ רציפה ביחס לטופולוגיה המטרית המוגדרת על ידי w אם ורק אם $\sigma \in G_w(L/K)$.

2. יהי $K=\mathbb{F}_p((x))$ השדה של טורי לורן מעל $\mathbb{F}_p$, עם ההערכה הטבעית

$$v\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n\right)=\min\{n\in\mathbb{Z}: a_n\neq 0\}.$$

הוכח כי

$$\begin{aligned} K^{nr} &= \overline{\mathbb{F}}_p((x)) \\ K^{tr} &= K^{nr}(\{x^{1/n}: n\in\mathbb{N}, p\nmid n\}). \end{aligned}$$

3. יהי K הנזלי ותהי L/K הרחבה סופית, מתונה, ומסועפת לגמרי. לא מניחים שהיא גלואה. הוכח שיש התאמה חד־חד־ערכית בין התת־הרחבות של L/K לבין התת־חבורות של $w(L^\times)/v(K^\times)$.

כאן, כמובן, v מסמנת את ההערכה של K, ואילו w הינה ההערכה היחידה של L שממשיכה את v.

4. יהי K שדה שלם עם הערכה בדידה, עם שדה שאריות סופי $\mathbb{F}_q$ ממאפיין p. יהי ζ_n שורש n־י פרימיטיבי של 1.

(א) יהי $L=K(\zeta_n)$, ונשתמש בכל הסימונים הרגילים מן השיעור. אם $p\nmid n$, הוכח כי L/K הינה הרחבה לא מסועפת ממעלה f, כאשר $f=\min\{m\in\mathbb{N}: q^m\equiv 1 \bmod n\}$.

(ב) עדיין נניח $p\nmid n$. הוכח כי $\mathrm{Gal}(L/K)$ ציקלית.

(ג) הוכח כי $\mathcal{O}_L=\mathcal{O}_K[\zeta_n]$.

רמז: הוכח כי $\mathcal{O}_L=\mathcal{O}_K[\zeta_n]+\mathfrak{p}_K\mathcal{O}_L$ והיעזר בלמה של נקיימה.

(ד) יהי $n=p^a$. הוכח כי $\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p$ מסועפת לגמרי ממעלה $\varphi(n)$, כי $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\zeta_n)/\mathbb{Q}_p)\simeq(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, כי $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}_p(\zeta_n)}=\mathbb{Z}_p[\zeta_n]$, וכי $1-\zeta_n\in\mathbb{Z}_p[\zeta_n]$ הינו מאחד. רמז: ההוכחה דומה להוכחה של התוצאות אנלוגיות עבור שדות מספרים, אבל פשוטה יותר.

5. יהיו L/K הרחבות של $\mathbb{Q}_p$, ותהי L/K הרחבה מתונה ומסועפת לגמרי ממעלה e. הוכח שקיים מאחד $\pi\in\mathcal{O}_K$ כך ש־ $L=K(\sqrt[e]{\pi})$.