

# תרגיל 10 – אלגברה מופשטת 1

1. הוכיחו או הפריכו:

- 1.1. קיימת חבורה פשוטה  $G$  מסדר 20.
- 1.2. קיימת חבורה פשוטה  $G$  מסדר 30.
- 1.3. תהי  $G$  חבורה מסדר 55 כך שיש בה יותר מארבעה איברים מסדר 5, אזי  $G$  אינה אבלית.

2. ענו על הסעיפים הבאים:

- 2.1. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 637 היא אבלית.
- 2.2. מצאו את כל החבורות מסדר 34, עד כדי איזומורפיזם.
- 2.3. מצאו את כל החבורות מסדר 121 עד כדי איזומורפיזם (רמז: ניתן להשתמש בשאלה 5.1 מתרגיל 9).
- 2.4. מצאו את כל החבורות מסדר 35, עד כדי איזומורפיזם.

3. תהי  $G$  חבורה מסדר 12 ויהיו  $n_2$  ו  $n_3$  מספר חבורות ה-2-סילו וה-3-סילו בהתאמה.

3.1. מהם ערכי  $n_2$  האפשריים? (הביאו דוגמאות לכך שכל הערכים המדוברים אכן אפשריים).

3.2. מהם ערכי  $n_3$  האפשריים? (שוב, הביאו דוגמאות).

3.3. האם יתכן ש  $n_2 = 3$  ו  $n_3 = 4$ ?

3.4. הראו כי  $n_2 = n_3 = 1$  אם ורק אם  $G$  אבלית.

4. ענו על הסעיפים הבאים.

4.1. תהי  $G$  חבורה מסדר 77. זהו את כל תתי החבורות שלה, עד כדי איזומורפיזם.

4.2. תהי  $G$  חבורה מסדר 4081. הוכיחו כי  $G$  ציקלית.

5. נתייחס לחבורה הסימטרית  $S_p$  כאשר  $p$  הוא מספר ראשוני.

5.1. כמה איברים מסדר  $p$  יש בחבורה?

5.2. חשבו באמצעות סעיף א' את מספר תתי החבורות מסדר  $p$  בתוך  $S_p$ .

5.3. בעזרת סעיף ב' ומשפט סילו השלישי הוכיחו כי  $(p-1)! \equiv (p-1) \pmod{p}$ .

6. הוכיחו או הפריכו: כל חבורה מסדר 15,16,17 היא אבלית.

7. תהי  $N \triangleleft G$  ויהי  $f: G \rightarrow G/N$  ההומומורפיזם הטבעי. (הכל סופי). הוכיחו שהתמונה של כל תת חבורת  $p$ -סילו של  $G$ , היא תת חבורת  $p$ -סילו של  $G/N$  (שימו לב שהתמונה היא  $PN/N$ ).

8. ענו על הסעיפים הבאים:

8.1. תהא  $G$  חבורה עם: 52 או 175 איברים. הוכיחו ש- $G$  לא פשוטה.

8.2. הוכיחו או הפריכו: אין חבורה פשוטה מסדר 125.

8.3. תהא  $G$  חבורה מסדר 1645 או 9797. הוכיחו ש- $G$  ציקלית.

בהצלחה! ☺