## סיכום תרגול 18.2.18

א. מצאו את הערך המקסימלי של $f\left(x\right)=\frac{2x}{1+x^2}$ ב- $\mathbb{R}$

**פתרון:**

נגזור ונשווה לאפס (הפונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$ )

$$f'\left(x\right)=\frac{2\cdot\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{-2x^2+2}{\left(1+x^2\right)^2}=0$$

$x=\pm 1$

אלו הן הנקודות הקריטיות

| $x$ | $x<-1$ | $-1$ | $-1<x<1$ | $1$ | $x>1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f\left(x\right)$ | $\searrow$ | $\cup$ | $\nearrow$ | $\cap$ | $\searrow$ |
| $f'\left(x\right)$ | $-1$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$f\left(1\right)=1$

בקטע $[0,\infty)$ זה מקסימום מוחלט (קיצון יחיד בקטע הוא מוחלט). בקטע $(-\infty,0]$

$$f\left(x\right)=\frac{negative}{positive}=negative<1$$

כלומר $f\left(x\right)\le 1$ גם ב- $[0,\infty)$ וגם ב-$(-\infty,0]$ לכן $\forall x\in\mathbb{R}: f\left(x\right)\le 1$

כלומר, $\left(1,1\right)$ נקודת מקסימום מוחלט.

ב. הוכיחו כי לכל $x>0$ מתקיים $0<\ln\left(1+x^2\right)\le x$

כיוון קל (למה גדול מאפס): $e^x>1$ עבור $x>0$ ולכן $\ln\left(x\right)>0$ עבור $x>1$, לכן $\ln\left(1+x^2\right)>0$

הכיוון הקשה: $\ln\left(1+x^2\right)\le x$ לכל $x>0$.

נגדיר:

$$f\left(x\right)=\ln\left(1+x^2\right)-x$$
$$f\left(0\right)=\ln 1-0=0$$

רק צריך להראות ש- $f\left(x\right)$ יורדת עבור $x\ge 0$

$f'\left(x\right)=\frac{2x}{1+x^2}-1<0$ נימוק- בסעיף א' הראינו ש- $\frac{2x}{1+x^2}\le 1$ (הנקודה היחידה בה בדיוק אפס היא $x=1$

לכן $f$ יורדת (לפי משפט המונוטוניות) לכל $x>0$ ■

**<u>תרגיל:</u>**

נתונה פונקציה בתחום $\left(-1,\infty\right)$

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{\sqrt{x}}-1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ arc\sin\left(x^2\right)\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x<0 \end{cases}$$

א. איפה $f$ רציפה?

**<u>פתרון:</u>**

עבור $x>0$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות

עבור $x<0$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות

נבדוק רציפות ב- $x=0$

$$f\left(0\right)=0$$

$$\lim_{x\to0^-}=\lim_{x\to0^-}\overbrace{\arcsin\left(x^2\right)}^{\to0}\underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{חסום}}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}=\lim_{x\to0^+}x^{\sqrt{x}}-1=\lim_{x\to0^+}e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)}-1=\lim_{x\to0^+}e^{\sqrt{x}\ln x}-1=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x}-1$$

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x="0\cdot-\infty"=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}}\underset{L'hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}=\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}}=\overbrace{\lim_{x\to0^+}-2\sqrt{x}}^{\text{חוקי חזקות}}=0$$

לכן:

$$\lim_{x\to0^+}f\left(x\right)=e^0=1-1=0$$

לכן $f\left(x\right)$ רציפה ב- $x=0$, ולכן $f\left(x\right)$ רציפה לכל $x\in\left(-1,\infty\right)$

ב. איפה $f$ גזירה ומה $f'$ שם?

**<u>פתרון:</u>**

עבור $x>0$ :

גזיר לפי נוסחאות גזירה:

$$\left(x^{\sqrt{x}}-1\right)'=\left(e^{\ln\left(x^{\sqrt{x}}\right)}-1\right)'=\left(e^{\sqrt{x}\ln x}-1\right)'=e^{\sqrt{x}\ln x}\cdot\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\overbrace{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x}\right)=x^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}\right)$$

עבור $x<0$ :

$$\left(\arcsin\left(x^2\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\arcsin\left(x^2\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

בנקודה $x=0$ :

נחשב לפי הגדרה:

$\Delta x>0$:

$$\frac{f(0+\Delta x)-\overbrace{f(0)}^{0}}{\Delta x}=\frac{\Delta x^{\sqrt{\Delta x}}-1}{\Delta x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\sqrt{x}}-1}{x}\underset{L'hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\overbrace{x^{\sqrt{x}}}^{\to1}\overbrace{(\ln x+2)}^{\to-\infty}}{\underbrace{2\sqrt{x}}_{\to0^+}}}{1}=-\infty$$

לכן יוצא מינוס אינסוף, ולכן לא גזיר ב- $x=0$

ג. מצאו נקודות קיצון מוחלט בקטע $[0,4]$

נקודות קריטיות:

$$\frac{x^{\sqrt{x}}(\ln x+2)}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\ln x+2=0$$

לכן $\ln x=-2$ ולכן $x=e^{-2}$

נקודות קריטיות: $0,e^{-2},4$

נציב בטבלה:

| $x$ | $0$ | $e^{-2}$ | $4$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-0.52$ | $15$ |

לכן: $(4,15)$ מקסימום מוחלט (לפי ויירשטראס) פונקציה רציפה בקטע סגור

$\left(e^{-2},-0.52\right)$ מינימום מוחלט (אותו דבר לפי משפט ויירשטראס)

**<u>תרגיל:</u>**

תהי $f$ בעלת נגזרת שנייה רציפה ב- $\mathbb{R}$.

נתון:

$$f(0)=f'(0)=f''(0)=0$$

$$f(2)=5,f(3)=8$$

צריך להראות: קיים $c\in[0,3]$ כך ש- $f''(c)=1$

**<u>פתרון:</u>**

צ"ל שיש $c$ כך ש0 $f''(c)-1$ .

נתון $f''(0)=0<1$ . אם נמצא נקודה $c_2$ בה $f''(c_2)>1$ נסיים לפי ערך הביניים כי נתון ש- $f''$ רציפה.

$f(2)=5,f(3)=8$ לפי לגראנז' יש $x_0\in[2,3]$ כך ש- $f'(x_0)=\frac{\overbrace{8}^{f(3)}-\overbrace{5}^{f(2)}}{3-2}=3$

**<u>הערה:</u>** לגרנז' אומר שאם $f$ רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע $(a,b)$ אז יש $x_0$ בקטע $\left(x_0\in[a,b]\right)$ כך ש- $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**<u>סיכום:</u>**

יש לנו $x_0 \in (2,3)$ כך ש- $f'(x_0)=3$ וגם יש $f'(0)=0$

$$f''(c_2)\frac{f'(x_0)-f'(0)}{x_0-0}$$

לכן שוב לפי לגרנז': יש $c_2 \in (0,x_0)$ כך ש-

$$f''(c_2)=\frac{3-0}{x_0-0}=\frac{3}{\underbrace{x_0}_{2<x_0<3}}>1$$

**<u>תרגיל:</u>** האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים?

א. $$\sum\frac{(-1)^n\cdot\left(n+\sin\left(n^2\right)\right)}{n^2}$$

**<u>פתרון:</u>**

נבדוק התכנסות בהחלט $\sum\frac{\left(n+\sin\left(n^2\right)\right)}{n^2}=\sum\frac{n}{n^2}+\sum\frac{\sin\left(n^2\right)}{n^2}$

$\sum\frac{n}{n^2}=\sum\frac{1}{n}$ והוא מתבדר.

נבדוק התכנסות בהחלט של $\sum\frac{\sin\left(n^2\right)}{n^2}$ :

$\underbrace{\sum\frac{\left|\sin\left(n^2\right)\right|}{n^2}}_{\text{טור חיובי}}\le\sum\frac{1}{n^2}$ קיבלנו טור p ש- $p=2$ ולכן מתכנס.

לכן לפי מבחן השוואה $\sum\frac{\sin\left(n^2\right)}{n^2}$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

קיבלנו מתכנס+ מתבדר כלומר מתבדר **לכן הראינו שהטור לא מתכנס בהחלט.**

**<u>אריתמטיקה של של טורים – תזכורת:</u>**

מתבדר + מתבדר =לא ידוע

מתבדר+ מתכנס = מתבדר

מתכנס+ מתכנס = מתכנס

**בחזרה לתרגיל...**

נבדוק התכנסות בתנאי:

$$\sum\frac{(-1)^n\left(n+\sin\left(n^2\right)\right)}{n^2}=\sum\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^2}}_{=\sum\frac{(-1)^n}{n}+\sum\frac{\left|n+\sin\left(n^2\right)\right|}{n^2}\le\sum\frac{1}{n^2}}+\sum\frac{n+\sin\left(n^2\right)}{n^2}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ - מתכנס לפי לייבניץ

$\sum \frac{(-1)^n \sin(n^2)}{n^2}$ מתכנס בהחלט – כבר הראינו בבדיקה של התכנסות בהחלט.

מתכנס+ מתכנס = מתכנס

**ולכן הטור מתכנס בתנאי.**

**<u>תרגיל:</u>**

$$\sum \frac{1}{n \underbrace{\sqrt[2n]{n}}_{\to 1}}$$

**<u>פתרון:</u>**

זהו טור חיובי:

נעשה מבחן השוואה גבולי עם $\sum \frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{n\sqrt[2n]{n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\sqrt[n]{n}}}_{\to 1}}$$

לכן לפי מבחן השוואה גבולי, הטור מתבדר יחד עם $\sum \frac{1}{n}$

**<u>תרגיל:</u>** חשבו את $\lim_{x \to 0^+} (\tan x)^x$

**<u>פתרון:</u>**

הצורה היא "$0^0$" לכן:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(\tan x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln \tan(x)} = \lim_{x\to 0^+} x\ln(\tan x) = "0\cdot\infty" = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{x}} \underset{L'hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x \cos^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\sin x \cos x} = \lim_{x\to 0^+} \underset{L'hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\cos(2x)} = \frac{-2\cdot 0}{\cos(2\cdot 0)} = 0$$

פונקציה רציפה ב- $x=0$ לכן:

$$\lim_{x\to 0^+} (\tan x)^x = e^0 = 1$$

**<u>תרגיל ארוך – הוכיחו/הפריכו:</u>**

1. $f(x),g(x)$ פונקציות ממשיות הגזירות בנקודה $x_0$ כך ש- $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=a\in\mathbb{R}$

אז $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=a$

הפרכה:

$$f(x)=2$$
$$g(x)=x$$
$$x_0=3$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{g'(0)}=\lim_{x\to 3}=\frac{0}{1}=0$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x\to 3}\frac{2}{x}=\frac{2}{3}$$

בקיצור זה לא לופיטל כי זה לא מהצורה "$\frac{0}{0}$" או "$\frac{\infty}{\infty}$"

2. אם $f(x)$ פונקציה ממשית הגזירה בנקודה $x_0$ , וקיים (וסופי) הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ אז הוא שווה ל- $f(x_0)$

**<u>פתרון:</u>** $f$ גזירה ב- $x_0$ ולכן רציפה ב- $x_0$ - לכן: $\lim_{x\to x_0}f(x)$ קיים ושווה ל- $f(x_0)$

3. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית הגזירה ב- $(a,b)$ ויהיו $c,d\in(a,b)$ כל ש- $c<d$ אז קיימת נקודה $p\in[c,d]$ כך ש- $f'(p)=\frac{f(d)-f(c)}{d-c}$

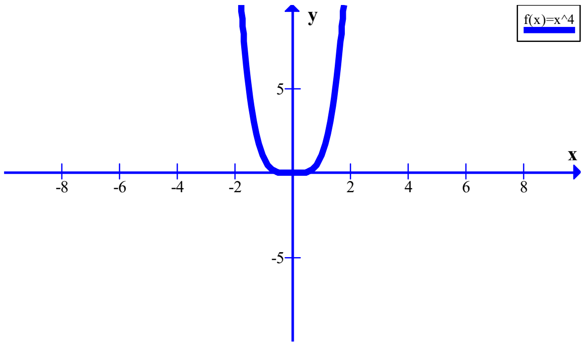
**<u>פתרון:</u>** $f$ גזירה ב- $(a,b)$ לכן רציפה ב- $(a,b)\supseteq[c,d]$ לכן $f$ מקיימת את כל התנאים של משפט לגרנז' בקטע $[c,d]$ : רציפה ב- $[c,d]$ וגזירה ב- $(c,d)$

4. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית הגזירה ב- $(a,b)$ ותהי $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f''(x_0)=0$ אז $x_0$ איננה נקודת קיצון של $f(x)$ .

**<u>פתרון:</u>** הפרכה:

$$f(x)=x^4$$
$$f'(x)=4x^3$$
$$f''(x)=12x^2$$
$$f''(0)=0$$

אבל $x_0=0$ נקודת קיצון




5. תהי $f(x)$ פונקציה ממשית המוגדרת ורציפה בקטע $(a,b)$ אז לכל קטע $[c,d]\subseteq(a,b)$ יש ל- $f(x)$ מקסימום מוחלט ב- $[c,d]$

**<u>פתרון:</u>** הוכחה.

$f(x)$ רציפה ב- $(a,b)$ ולכן רציפה ב- $[c,d]$ = קטע סוגר וחסום. לכן מש"ל לפי ויירשטראס.

6. אם $f(x)$ פונקציה ממשית המוגדרת ב- $[a,b]$ וגזירה ב- $(a,b)$ אז קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**<u>פתרון:</u>** הפרכה

נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2 & x=0 \\ 2 & x=1 \end{cases}$$

בקטע $[0,1]$ ואכן:

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{2-2}{1-0}=0$$

וכן, אין $c\in(0,1)$ כך ש- $f'(c)=0$ כי $f(x)=x$ וזו פונקציה עולה ב- $0<x<1$