תרגול מכפלה סקלרית

האורך של וקטור $\underline{u}$ הוא: $\boxed{|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}}$

בעזרת הסימון $\underline{u}\cdot\underline{u} = \underline{u}^2$ נקבל $|\underline{u}|^2 = \underline{u}^2$ וכן $|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2}$.
(שים לב: השורש הריבועי כאן **לא מבטל** את המעריך של החזקה, שהוא 2).

כדי לחשב את האורך של וקטור צריך לחשב את המכפלה הסקלרית של הווקטור בווקטור עצמו ולהוציא מהתוצאה שורש ריבועי.

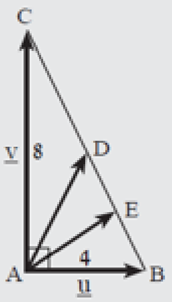
דוגמא ב׳:
נתון: $|\underline{u}| = 2$, $|\underline{v}| = 6$, $\underline{u}\cdot\underline{v} = 3$. חשב את האורך של הווקטור $2\underline{u}-\underline{v}$.

דוגמא ד׳:
נתון: $|\underline{u}| = 1$, $|\underline{v}| = \sqrt{3}$ והזווית בין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$ היא 90°. חשב את הזווית שבין $\underline{u}$ ל- $\underline{u}-\underline{v}$.

דוגמא ה׳:
אורך הווקטור $\underline{u}$ הוא $\sqrt{3}$ והוא ניצב לווקטור $2\underline{u}-\underline{v}$ שאורכו 2. חשב את הזווית α שבין $\underline{u}$ ל- $\underline{v}$.

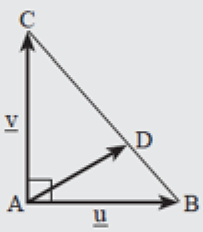
דוגמא א׳:
במשולש ישר זווית ABC ($\measuredangle A = 90^\circ$) נתון: $AB = 4$, $AC = 8$. הנקודה D היא אמצע BC והנקודה E היא אמצע DB. נסמן $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

א. הבע את הווקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{AE}$ באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$.
ב. חשב את אורכי הווקטורים $\overrightarrow{AD}$ ו- $\overrightarrow{AE}$.
ג. חשב את הזווית DAE.



דוגמא ג׳:
במשולש ישר זווית ABC ($\measuredangle A = 90^\circ$) נתון: $AB = 3$, $AC = \sqrt{12}$. הנקודה D נמצאת על הצלע BC או על המשכה ומקיימת $\overrightarrow{BD} = t\overrightarrow{BC}$. נסמן $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

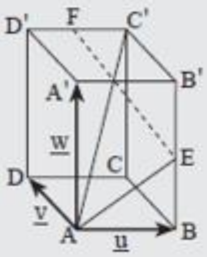
א. הבע את $\overrightarrow{AD}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- t.
ב. הבע באמצעות t את אורך $\overrightarrow{AD}$.
ג. חשב את ערכי t עבורם $\measuredangle BAD = 30^\circ$ והסבר היכן נמצאת הנקודה D בכל מקרה.
ד. מצא את t עבורו אורך $\overrightarrow{AD}$ הוא מינימלי.



חישוב אורכי וקטורים וזויות במרחב – המכפלה הסקלרית

נביא עכשיו דוגמאות לחישובים בצורות מרחביות.

דוגמא א':



בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתון: $AB = 2$, $AD = 3$, $AA' = 6$.

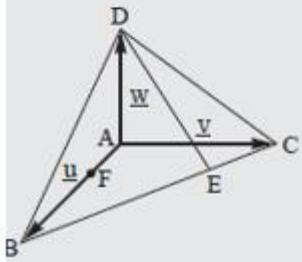
נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{AC'}$ וחשב את אורכו.

ב. הנקודה E היא אמצע $\overrightarrow{BB'}$. חשב את הזוית EAC'.

ג. הנקודה F היא אמצע $\overrightarrow{D'C'}$. חשב את הזוית שבין $\overrightarrow{EF}$ ל-$\overrightarrow{AC'}$.

דוגמא ב':



נתון טטראדר $ABCD$. הנקודה E מחלקת את BC ביחס של $BE:EC = 2:1$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{w}$.

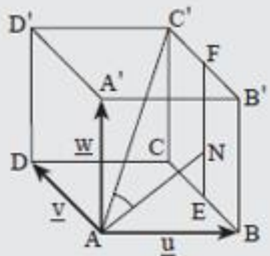
א. הבע את $\overrightarrow{DE}$ באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$.

ב. נתון שהווקטורים $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו-$\underline{w}$ ניצבים זה לזה וכן $AB = AC = 3$, $AD = 2$. חשב את הזוית EDA.

ג. הנקודה F מקיימת $\overrightarrow{AF} = t\overrightarrow{AB}$. מצא את ערכי t עבורם $\sphericalangle EDF = 45°$.

בעיות מינימום ומקסימום במרחב – המכפלה הסקלרית

נביא דוגמא לבעיית מינימום ומקסימום במרחב.



דוגמא ד':

בקוביה $ABCDA'B'C'D'$ שאורך המקצוע שלה הוא 1 הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המקצועות BC ו-$B'C'$. הנקודה N מקיימת $\overrightarrow{EN} = t\overrightarrow{EF}$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו-t את קוסינוס הזוית NAC'.

ב. חשב את ערך t עבורו הזוית NAC' היא מינימלית ומצא את הזוית המינימלית.