

שאלה 1

חשבו את הגבולות החד צדדיים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^5 - 14x^4 + 48x^3}{x^2 - 12x + 36} \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^3(x^2 - 14x + 48)}{(x-6)^2} &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^3(x-8)}{(x-6)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-x^5 + 8x^4 - 16x^3}{x^2 - 9x + 20} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-x^3(x^2 - 8x + 16)}{(x-4)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-x^3(x-4)}{(x-5)} = 0 \quad (\text{ב}) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^3 + 6x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x(x^2 - 6x + 8)}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x(x-4)}{(x-3)} = -4 \quad (\text{ג}) \end{aligned}$$

שאלה 2

חשב את הגבול הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right] \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right] = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 10}{x-5} & \quad (\text{ב}) \end{aligned}$$

פתרון:

הגבול כאן הוא אפס

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5} \quad (\text{ג})$$

פתרון:

לאחר פתיחת סוגריים נקבל שהגבול הוא $\frac{3}{4}$

שאלה 3

נחשב את הגבול מימין:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \cos(3x))}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \cos(2 \cdot \frac{3x}{2}))}{3x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - [1 - 2\sin^2(\frac{3x}{2})])}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4\sin^2(\frac{3x}{2})}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2(\frac{3x}{2})}{(\frac{3x}{2})^2} \cdot \frac{1}{3} = 3\end{aligned}$$

נחשב את הגבול משמאל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3$$

הגבולות מימין ומשמאל שווים, לכן הגבול של הפונקציה ב-0 הוא 3. הגבול של הפונקציה ב-0 שווה לערך הפונקציה ב-0, ולכן הפונקציה רציפה ב-0.

שאלה 4

הגבול מימין הוא אינסוף, ולכן הפונקציה אינה רציפה ב-0, וזו נקודת אי-רציפות מסוג שני.

שאלה 5

נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{20x} - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4 \cdot \frac{e^{20x} - 1}{20x} = 4$$

נחשב את הגבול משמאל:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 9x)}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(1 - \cos 9x)}{9x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4 \sin^2 \frac{9x}{2}}{9x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 \frac{9x}{2}}{\left(\frac{9x}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{9}} = 9$$

הגבולות מימין משמאל קיימים וסופיים, אך שונים זה מזה. לכן הפונקציה לא רציפה, וזו נקודת אי רציפות מסוג ראשון.

שאלה 6

נחשב את הגבול מימין: בדומה לחישובים בשאלות 3 ו-5, הגבול הוא 7a.

נחשב את הגבול משמאל: בדומה לחישוב בשאלה 5, הגבול הוא 14.

על מנת שהפונקציה תהיה רציפה, הגבול מימין והגבול משמאל חייבים להיות שווים, ולכן בהכרח $a=2$.

כמו כן, ערך הפונקציה ב-0 צריך גם הוא להיות 14, כלומר $a+b=14$. כפי שראינו, $a=2$, ולכן $b=12$.