משוואת החום

משוואת החום ההומוגנית בקטע סופי (עם תנאי דריכלה הומוגני):

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

תנאי תאימות למשוואת החום (u צריכה להיות רציפה):

$$\underbrace{u(0,0) = f(0)}_{\text{מתנאי התחלה}}, \underbrace{u(0,0) = 0}_{\text{מתנאי השפה}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$\underbrace{u(L,0) = f(L)}_{\text{מתנאי התחלה}}, \underbrace{u(L,0) = 0}_{\text{מתנאי השפה}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(L) = 0}$$

<u>המד"ח הומוגנית ולכן נוכל לעשות הפרדת משתנים:</u>

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) - c^2 X''(x)T(t) = 0$$

$$\boxed{\frac{X''}{X} = \frac{T'}{c^2 T} = -\lambda}$$

מתנאי שפה דריכלה:

$$0 = u(0,t) = X(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X(0) = 0$$

$$0 = u(L,t) = X(L)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X(L) = 0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{c^2 T(t)} = -\lambda \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

נפתור תחילה עבור X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

נפתור עבור T:

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)}=-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2$$

נעשה אינטגרל לפי t:

$$\ln\big(T_n(t)\big)=-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t+\tilde{a}_n$$

$$\boxed{T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}}$$

לכן:

$$u_n(x,t)=X_n(x)T_n(t)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)A_n e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}=B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}$$

לכן:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 t}$$

כאשר:

$$f(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

<u>מקדמי פורייה:</u>

$$\boxed{B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx}$$

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת החום:

$$\begin{cases} u_t-17u_{xx}=0, & 0<x<\pi, t>0 \\ u(x,0)=\begin{cases} 0, & 0\le x<\frac{\pi}{2} \\ 2, & \frac{\pi}{2}\le x<\pi \end{cases}, & 0\le x\le\pi \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\ge 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נציב בנוסחה הנ"ל כאשר $L=\pi$, $c^2=17$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(nx)\,e^{-17n^2t}$$

נרצה לחשב את המקדמים B_n:

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(nx)\,dx$$
$$= -\frac{4}{n\pi}\left[\cos(nx)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} = -\frac{4}{n\pi}\left[\cos(n\pi) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$
$$= \frac{4}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

לכן:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left[(-1)^{n+1} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\sin(nx)\,e^{-17n^2t}}$$

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את המד"ח:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = x^2 - 1, & 0 \le x \le 1 \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נפתור בעזרת הפרדת משתנים:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) - X''(x)T(t) + X(x)T(t) = 0$$

$$X(x)[T'(t) + T(t)] = X''(x)T(t)$$

$$\boxed{\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) + T(t)}{T(t)} = -\lambda}$$

מתנאי השפה:

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$

$$0 = u_x(0,t) = X'(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X'(0) = 0$$

$$0 = u(1,t) = X(1)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X(1) = 0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \frac{X''}{X} = \frac{T' + T}{T} = -\lambda \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

נתחיל מלפתור את המשוואה עבור X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

נחלק ל – 3 מקרים:

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

$$X'(x) = c_0$$

$$X(x) = c_0 x + d_0$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X'(0) = c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$$

$$0 = X(1) = d_0 \Rightarrow \boxed{d_0 = 0}$$

$\Leftarrow$ $X(x) = 0$ מקרה טריוויאלי.

<u>$\lambda < 0$:</u>

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

$$k^2 + \lambda = 0$$

$$k^2 = -\lambda$$

$$k = \pm\sqrt{-\lambda}$$

לכן:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

נציב תנאי שפה:

$$X'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$X'(0) = c_1\sqrt{-\lambda} - c_2\sqrt{-\lambda} = 0$$

$$\boxed{c_1 = c_2}$$

$$0 = X(1) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$$

$$c_1 \underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)}_{\neq 0} = 0$$

$$\boxed{c_1 = 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

לכן $X(x) = 0$ מקרה טריוויאלי.

$\lambda > 0$:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X'(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

לכן:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

נציב תנאי שפה:

$$0 = X'(0) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = X(1) = \underbrace{c_1}_{\substack{\neq 0 \\ \text{אחרת טריוויאלי}}} \cos(\sqrt{\lambda})$$

$$\cos(\sqrt{\lambda}) = 0$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = \left[\pi\left(\frac{1}{2} + n\right)\right]^2}$$

קיבלנו ע"ע. נציב כיד למצוא את הפ"ע:

$$X_n(x) = C_n \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

נחזור למשוואה של T:

$$\frac{T_n'(t) + T_n(t)}{T_n(t)} = -\pi^2\left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} + 1 = -\pi^2\left(\frac{1}{2} + n\right)^2$$

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -\left[\pi^2\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 + 1\right]$$

נבצע אינטגרל לפי t:

$$\ln(T_n(t)) = -\left[\pi^2\left(\frac{1}{2} + n\right)^2 + 1\right]t + \tilde{a}_n$$

$$\boxed{T_n(t) = A_n e^{-\left[\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2 + 1\right]t}}$$

נציב חזרה:

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = C_n \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) A_n e^{-\left[\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+1\right]t}$$
$$= B_n \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) e^{-\left[\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+1\right]t}$$

ולכן:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) e^{-\left[\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+1\right]t}$$
$$u(x,0) = x^2 - 1$$

<u>נשתמש במקדמי פורייה:</u>

$$B_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (x^2-1)\cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right)dx = \cdots = \frac{32(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3}$$

ולכן:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{32(-1)^{n+1}}{\pi^3(2n+1)^3} \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)x\right) e^{-\left[\pi^2\left(\frac{1}{2}+n\right)^2+1\right]t}}$$

■

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת החום:

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = \cos^2(x), & 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נפתור בעזרת הפרדת משתנים:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$
$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{4T} = -\lambda$$

תנאי שפה:

$$u_x(x,t) = X'(x)T(t)$$
$$0 = u_x(0,t) = X'(0)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X'(0) = 0$$
$$0 = u_x(\pi,t) = X'(\pi)\underbrace{T(t)}_{\neq 0} \Rightarrow X'(\pi) = 0$$

קיבלנו:

$$\begin{cases} \dfrac{X''}{X} = \dfrac{T'}{4T} = -\lambda \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

נפתור תחילה את הבעיה עבור X:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

נחלק ל – 3 מקרים:

<u>$\lambda = 0$:</u>

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$X'(x) = c_0$$

$$X(x) = c_0 x + d_0$$

$$0 = X'(0) = X'(\pi) = c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 0}$$

$$\boxed{X(x) = d_0}$$

מקרה <u>לא טריוויאלי</u>.

<u>$\lambda < 0$:</u>

ראינו שהוא טריוויאלי.

<u>$\lambda > 0$:</u>

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

נקבל:

$$X(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

מתנאי השפה:

$$0 = X'(0) = c_2 \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0} \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$0 = X'(\pi) = -c_1 \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0} \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

נניח ש - $c_1 \neq 0$ (אחרת נקבל פתרון טריוויאלי):

$$\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$$

$$\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$$

$$\boxed{\lambda_n = n^2}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

קיבלנו ע"ע (נשים לב שהכנסנו גם את המקרה של $n = 0$). הפ"ע הן:

$$\boxed{X_n(x) = C_n\cos(nx)}, \qquad n = 0,1,2,\dots$$

נחזור למשוואה של T:

$$\frac{T_n'(t)}{T_n(t)} = -4n^2$$

נבצע אינטגרל לפי t:

$$\ln\big(T_n(t)\big) = -4n^2t + \tilde{a}_n$$

$$\boxed{T_n(t) = a_n e^{-4n^2t}}$$

לכן:

$$u_n(x,t) = B_n\cos(nx)\,e^{-4n^2t}$$

לכן:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos(nx)\,e^{-4n^2t}}$$

כעת, נמצא את B_n:

$$\cos^2(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos(nx)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\cos(nx)$$

לכן:

$$n = 0 : B_0 = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 : B_2 = \frac{1}{2}$$

$$n \neq 0,2 : B_n = 0$$

נציב ונקבל:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\,e^{-16t}}$$

■

תנאי שפה לא הומוגניים:

נניח ש:

$$u(0,t) = a(t)\,, u(L,t) = b(t)$$

עבור תנאי שפה לא הומוגניים, נגדיר:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

כאשר $v(x,t)$ היא פו' תיקון שלוקחת מ – u את תנאי השפה.

לאחר שנמצא את $v(x,t)$, נסמן $w = u - v$ ונפתור את בעיית החום/הגלים על w.

לכן:

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t)$$

$$a(t) = a(t) + w(0,t) \Rightarrow w(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = v(L,t) + w(L,t)$$

$$b(t) = b(t) + w(L,t) \Rightarrow w(L,t) = 0$$

1) מקרה של תנאי דריכלה:

$$v(0,t) = a(t), v(L,t) = b(t)$$

ננחש:

$$v(x,t) = x\,f(t) + g(t)$$

$$a(t) = v(0,t) + g(t) \Rightarrow \boxed{g(t) = a(t)}$$

$$b(t) = v(L,t) = Lf(t) + a(t)$$

$$\boxed{\frac{b(t) - a(t)}{L} = f(t)}$$

ולכן:

$$\boxed{v(x,t) = \frac{x}{L}[b(t) - a(t)] + a(t)}$$

2) מקרה של תנאי שפה נוימן:

$$u_x(0,t) = a(t)\,, u_x(L,t) = b(t)$$

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$v(x,t)$ פונקציית תיקון שלוקחת מ - u המקורית את תנאי השפה:

$$\varphi(0,t) = v_x(0,t) = a(t)$$

$$\boxed{\varphi(0,t) = a(t)}$$

$$\varphi(L,t) = v_x(L,t) = b(t)$$

$$\boxed{\varphi(L,t)=b(t)}$$

$$\varphi(x,t)=\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)$$

כדי למצוא את v נשים לב ש - $\varphi=v_x$. לכן, כיד למצוא את $v(x,t)$ נעשה אינטגרל לפי x לפונקציה φ:

$$v(x,t)=\int\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)\,dx$$

$$\boxed{v(x,t)=\frac{x^2}{2L}[b(t)-a(t)]+a(t)x}$$

3) מקרה של תנאי שפה רובין:

$$u_x(0,t)=a(t)\,,u(L,t)=b(t)$$

נגדיר - $u=v+w$, כאשר v פונקציית תיקון שלוקחת מ – u המקורית את תנאי השפה:

$$v_x(0,t)=a(t)\,,v(L,t)=b(t)$$

לכן:

$$v(x,t)=\int v_x(0,t)\,dx=a(t)x+g(t)$$

לכן:

$$b(t)=v(L,t)=a(t)L+g(t)$$

$$\boxed{g(t)=b(t)-a(t)L}$$

לכן:

$$\boxed{v(x,t)=(x-L)a(t)+b(t)}$$

4) תנאי שפה של רובין הפוך:

$$u(0,t)=a(t)\,,u_x(L,t)=b(t)$$

נגדיר - $u=v+w$, כאשר v פונקציית תיקון שלוקחת מ – u המקורית את תנאי השפה:

$$v(0,t)=a(t)\,,v_x(L,t)=b(t)$$

לכן:

$$v(x,t)=\int v_x(L,t)\,dx=b(t)x+g(t)$$

לכן:

$$a(t)=v(0,t)=g(t)$$

$$\boxed{g(t)=a(t)}$$

לכן:

$$\boxed{v(x,t)=b(t)x+a(t)}$$

<u>לסיכום:</u>

	תנאי שפה	פונקציית תיקון
1	$u(0,t)=a(t)$ $u(L,t)=b(t)$	$v(x,t)=\frac{x}{L}[b(t)-a(t)]+a(t)$
2	$u_x(0,t)=a(t)$ $u_x(L,t)=b(t)$	$v(x,t)=\frac{x^2}{2L}[b(t)-a(t)]+a(t)x$
3	$u_x(0,t)=a(t)$ $u(L,t)=b(t)$	$v(x,t)=(x-L)a(t)+b(t)$
4	$u(0,t)=a(t)$ $u_x(L,t)=b(t)$	$v(x,t)=b(t)x+a(t)$

<u>תרגיל:</u>

פתרו את משוואת החום:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=\dfrac{x(1+\pi t)}{\pi}, & 0<x<\pi, t>0 \\ u(x,0)=2\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right), & 0\le x\le \pi \\ u(0,t)=2, & t\ge 0 \\ u(\pi,t)=t, & t\ge 0 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נגדיר –

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$$

לכן:

$$a(t)=v(0,t)=2$$

$$b(t)=v(\pi,t)=t$$

ולכן קיבלנו פונקציית תיקון:

$$\boxed{v(x,t)=\frac{x}{\pi}[t-2]+2}$$

כעת:

$$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t)$$

נקבל:

$$\boxed{w(0,t)=w(\pi,t)=0}$$

$$w_t(x,t)=u_t-v_t=u_t-\frac{x}{\pi}$$

$$w_{xx} = u_{xx} - v_{xx} = u_{xx}$$

$$\Rightarrow w_t - w_{xx} = u_t - \frac{x}{\pi} - u_{xx} = u_t - u_{xx} - \frac{x}{\pi} = \frac{x}{\pi} + xt - \frac{x}{\pi} = xt$$

$$w_t - w_{xx} = xt$$

$$w(x,0) = u(x,0) - v(x,0) = 2\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \frac{2x}{\pi} - 2 = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi} + x\right)$$

וכעת:

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi} + x\right), & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 2, & t \ge 0 \\ u(\pi,t) = t, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = xt, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ w(x,0) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x^2}{\pi} + x\right), & 0 \le x \le \pi \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$$

וממשיכים לפתור כרגיל...

■