

תרגיל 13 אינפי 3 תשע"ו

20 בינואר 2016

1. יהי משטח הנתון על ידי הפונקציה $z = f(x, y)$. שטח הפנים של המשטח מעל התחום

R נתון על ידי:

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

חשבו את שטח הפנים של ספירה עם רדיוס a .

2. יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ , אזי המסה של G מוגדרת על ידי:

$$m = \iiint_G \rho(x, y, z) dx dy dz$$

חשבו את המסה של כדור B ברדיוס R שצפיפותו ρ פרופורציונאלית למרחק מהמרכז

בריבוע, כלומר $\rho = ar^2$ (השתמשו בקואורדינטות כדוריות).

3. יהי G גוף עם פונקציית צפיפות ρ . המומנטים הסטטיים של G ביחס למישורי הצירים

מוגדרים על ידי:

$$M_{xy} = \iiint_G z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$M_{xz} = \iiint_G y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$M_{yz} = \iiint_G x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

מרכז הכובד של G הוא נקודה ששיעוריה נתונים על ידי:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

כאשר M_{xy}, M_{yz}, M_{xz} הם המומנטים הסטטיים ו- m היא המסה.

חשבו את מרכז הכובד של חצי כדור G הומוגני (ρ קבועה) שרדיוסו R . אפשר "להניח"

את הכדור בכל מקום שתמצאו ב- \mathbb{R}^3 .

4. יהי G עם פונקציית צפיפות ρ . **מומנטי ההתמד** (אינרציה) ביחס למישורי הצירים

נתונים על ידי:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \rho(x, y, z) dx dy dz$$

מומנטי ההתמד ביחס לצירים נתונים על ידי:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

מומנט ההתמד ביחס לראשית נתון על ידי:

$$I_0 = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

חשבו את מומנטי ההתמד ביחס לציר ה- z של חרוט הומוגני G עם רדיוס בסיס R

וגובה H שקודקודו בראשית ובסיסו מקביל למישור xy .

5. שאלה מעט מאתגרת. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$

ב. $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

נסו להשתמש באינטגרלים כפולים.