

תרגיל בית 1 בשדות ותורת גלואה

88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. כהכנה לשבוע הבא, שחקו ב"אוקלידס: המשחק" (או בקישור הזה) והגיעו לפחות לשלב 6. הרבה יותר נוח להשתמש במחשב נייד או נייד מאשר בטלפון.

שאלה 2. בדקו האם הפולינומים הבאים אי פריקים:

א. $3x^2 - 7x - 5$ ב- $\mathbb{Q}[x]$ (גם בלי נוסחת השורשים).

ב. $x^3 - 7x + 2$ ב- $\mathbb{Q}[x]$.

ג. $x^3 - 7x + 2$ ב- $\mathbb{Z}_5[x]$.

ד. $x^3 - 6x - 9$ ב- $\mathbb{Q}[x]$.

ה. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ ב- $\mathbb{Q}[x]$.

שאלה 3. מצאו את הפירוק של הפולינום $x^4 - 2$ מעל השדות הבאים:

א. \mathbb{C}

ב. \mathbb{R}

ג. \mathbb{Q}

ד. \mathbb{Z}_3

שאלה 4. יהי $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים. נניח כי $a_n, f(0)$ ו- $f(1)$ הם אי זוגיים. הוכיחו כי ל- f אין שורשים ב- \mathbb{Q} . רמז: טענה מהתרגול.

שאלה 5. יהי $f(x) \in F[x]$ פולינום מדרגה $n \geq 1$.

א. הוכיחו כי $F[x]/\langle f(x) \rangle$ הוא מרחב וקטורי מעל F עם בסיס $\{\bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1}\}$.

ב. הציגו את

$$x^4 - x^3 + x - 2 \in \mathbb{Q}[x]/\langle x^3 - x^2 - 1 \rangle$$

כצירוף לינארי של אברי הבסיס $\{\bar{1}, \bar{x}, \bar{x}^2\}$.

שאלה 6 (חזרה לשיטת הרדוקציה למי ששכח). יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ויהי p מספר ראשוני. נסמן ב- $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ את φ את הומומורפיזם ההטלה. אפשר להרחיב את φ לפונקציה

$$\psi: \mathbb{Z}[x] \rightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$$

שפשוט "עושה מודולו" לכל מקדם של הפולינום, והיא עדיין הומומורפיזם של חוגים. נניח ש- $\deg \psi(f(x)) = \deg f(x)$ וגם $\psi(f(x))$ אי פריק. הוכיחו כי $f(x)$ אי פריק. הדרכה: נניח בשלילה ש- $f(x) = g(x)h(x)$ הוא פירוק אמיתי (כלומר לאיברים לא הפיכים). שימו לב כי $\psi(f(x)) = \psi(g(x))\psi(h(x))$ ועכשיו משהו בדרגות הפולינומים לא מסתדר.

בהצלחה!