בס"ד

פתרון תרגיל בית 5, גיאומטרי'ה אנליטית, זהבית צבי

סווגו את התבניות הריבועיות הבאות ומצאו להן צורה קנונית:

1. $2x^2+y^2+3y=0$
2. $4x^2+y^2+6x-12y+\frac{113}{4}=0$
3. $4x^2+4y^2+6x-12y+10=0$
4. $6x^2+12y-10=0$
5. $4x^2+y^2-40x+6y+93=0$

פתרון

1. המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}0&3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}=0\ \ (*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים וקטורים עצמים, כיוון שהע"ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע"ע הם: $\lambda_1=2,\lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&3\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=0\Rightarrow$$

$$2x'^2+y'^2+3y'=0$$

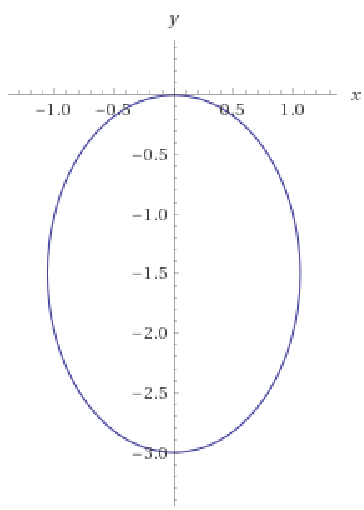
נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$:

$$2x'^2+y'^2+3y'=0\,(:2)\Rightarrow x'^2+\underbrace{\frac{1}{2}y'^2}_{u=\frac{1}{\sqrt{2}}y'}+\underbrace{\frac{3}{2}y'}_{2\underbrace{u}_{\frac{1}{\sqrt{2}}y}v=\frac{3}{2}y'\ \Rightarrow v=\frac{3}{2\sqrt{2}}}+\underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2}_{v^2}=\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2\Rightarrow x'^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y'+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{9}{8}$$

$$x'^2+\frac{1}{2}\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{8}\left(:\frac{9}{8}\right)\Rightarrow\frac{x'^2}{\frac{9}{8}}+\frac{1}{2}\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{8}}=1\Rightarrow\frac{x'^2}{\frac{9}{8}}+\frac{\left(y'+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}}=1$$

כאשר $a^2=\frac{9}{8},\ b^2=\frac{9}{4}\Leftarrow b=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2},\ a=\sqrt{\frac{9}{8}}=\frac{3}{2\sqrt{2}}$. זו אליפסה מוזזת שמרכזה בנקודה $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$.

<u>איור</u>:



כיוון ש- $P=I$, הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה $\theta=0$ ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו- y הם זהים לאלה של x' ו- y'.

2. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}6 & -12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}}_{X}+\frac{113}{4}=0\ \ (*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1=4,\lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו

אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\frac{113}{4}=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+y'^2+6x'-12y'+\frac{113}{4}=0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

$$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2\ ,\ (u-v)^2=u^2-2uv+v^2$$

$$\underline{4x'^2}+\underline{\underline{y'^2}}+\underline{6x'}-\underline{\underline{12y'}}+\frac{113}{4}=0\Rightarrow\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}\right)^2\right\}}_{(u+v)^2}+\underbrace{\left\{\left(\underbrace{y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{6}_{v}+\underbrace{6}_{v}^2\right\}}_{(u-v)^2}+\frac{113}{4}-\left(\frac{3}{2}\right)^2-6^2=0$$

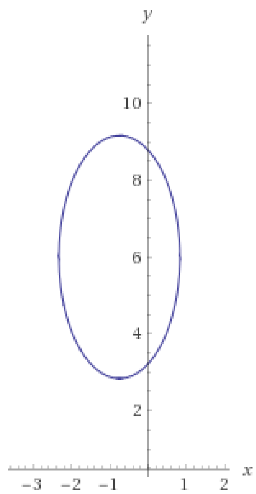
$$\Rightarrow\left(2x'+\frac{3}{2}\right)^2+(y'-6)^2=-\frac{113}{4}+\frac{9}{4}+36=10\Rightarrow\left[2\left(x'+\frac{3}{4}\right)\right]^2+(y'-6)^2=10$$

$$\Rightarrow4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+(y'-6)^2=10\ (:10)\Rightarrow\frac{\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2}{\underbrace{\frac{10}{4}}_{a^2}}+\frac{(y'-6)^2}{\underbrace{10}_{b^2}}=1$$

כאשר $a^2=\frac{10}{4}\ ,\ b^2=10 \Leftarrow a=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2},\ b=\sqrt{10}$.

זו אליפסה מוזזת שמרכזה בנקודה $\left(-\frac{3}{4},6\right)$.

<u>איור:</u>



הצירים באיור הם x', y' .

כיוון ש- $P=I$, הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה $\theta=0$ ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו- y הם זהים לאלה של x' ו- y' .

3. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא : $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך : $(*)\quad \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} 6 & -12 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+10=0$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. אנו רואים כי $\lambda_1=\lambda_2=4$, לכן $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1=\lambda_2$ ולכן אנו יודעים שצריך לקבל מעגל. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים :

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא : $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל :

בס"ד

$$\begin{pmatrix} x' & y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+10=0\Rightarrow$$

$$4x'^2+4y'^2+6x'-12y'+10=0$$

בכדי לקבל צורה קנונית נבצע השלמות לריבוע לפי נוסחאות הכפל המקוצר:

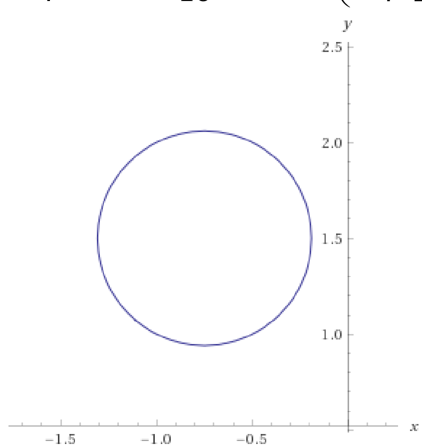
$$(u+v)^2=u^2+2uv+v^2\ ,\ (u-v)^2=u^2-2uv+v^2$$

$$\underline{4x'^2}+\underline{\underline{4y'^2}}+\underline{6x'}-\underline{\underline{12y'}}+10=0\Rightarrow\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2+2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}+\left(\underbrace{\frac{3}{2}}_{v}\right)^2\right\}}_{(u-v)^2}+\underbrace{\left\{\left(\underbrace{2y'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{2y'}_{u}\cdot\underbrace{3}_{v}+\underbrace{3}_{v}^2\right\}}_{(u-v)^2}+10-\left(\frac{3}{2}\right)^2-3^2=0$$

$$\Rightarrow\left(2x'+\frac{3}{2}\right)^2+\left(2y'-3\right)^2=-10+\frac{9}{4}+9=\frac{5}{4}\Rightarrow\left[2\left(x'+\frac{3}{4}\right)\right]^2+\left[2\left(y'-\frac{3}{2}\right)\right]^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow4\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+4\left(y'-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(:4)\Rightarrow\left(x'+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y'-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

קיבלנו מעגל מוזז שמרכזו בנקודה $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ ברדיוס $R^2=\frac{5}{16}\Leftarrow R=\frac{\sqrt{5}}{4}$.



כיוון ש- $P=I$, הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה $\theta=0$ ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו- y הם זהים לאלה של x' ו- y'.

4. המטריצה של התבנית הנתונה כאן היא: $A=\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}$.

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $(*)$ $\underbrace{\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix}0&12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}_{X}-10=0$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1=6,\lambda_2=0$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2=0$ ו- $\lambda_2=0$, $\lambda_1\neq 0$, לכן זו פרבולה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

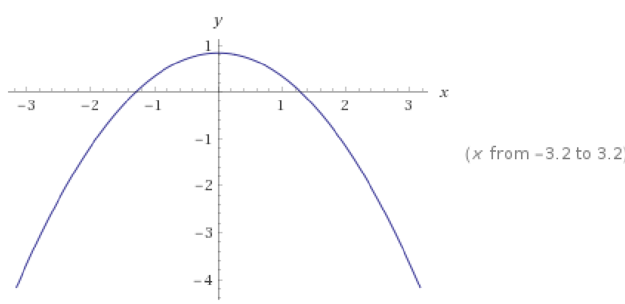
החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix}x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix}x'&y'\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}6&0\\0&0\end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&12\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-10=0\Rightarrow$$

$$6x'^2+12y'-10=0\Rightarrow y'=\frac{5}{6}-\frac{1}{2}x'^2$$

קיבלנו פרבולה מוזזת.

<u>איור:</u>



כיוון ש- $P=I$, הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב $\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה $\theta=0$ ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו- y הם זהים לאלה של x' ו- y'.

5. המטריצה היא:

$$A=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$$

והתבנית הנתונה נכתבת כך: $\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{X^t}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+\begin{pmatrix} -40 & 6 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X}+93=0 \quad (*)$

המטריצה כבר אלכסונית, לכן אין צורך לחשב את הערכים העצמים ווקטורים עצמים, כיוון שהע״ע נמצאים על האלכסון הראשי. הע״ע הם: $\lambda_1=4,\lambda_2=1$ ולפי מה שלמדנו $\lambda_1\lambda_2>0$ ו- $\lambda_1\neq\lambda_2$, לכן זו אליפסה. המטריצה לכסינה אורתוגונלית באמצעות המטריצה המלכסנת $P=I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, מתקיים:

$P^tAP=I^tAI=IAI=A=D$.

החלפת המשתנים כאן היא: $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\underbrace{P}_{I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. מכיוון ש- $P=I$, נציב בתבנית ונקבל:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A=D}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -40 & 6 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P=I}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+93=0 \Rightarrow$$

$$4x'^2+y'^2-40x'+6y'+93=0$$

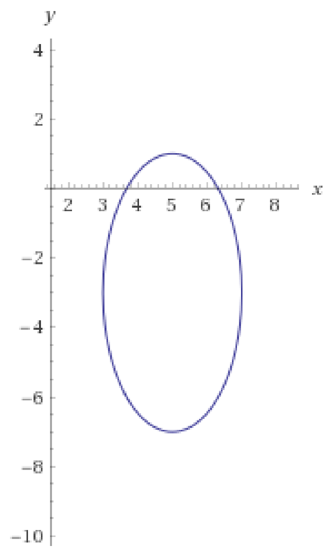
נבצע השלמה לריבוע לפי נוסחת הכפל המקוצר $(u+v)^2=u^2+2uv+v^2$:

$$\underline{4x'^2}\underline{\underline{+y'^2}}\underline{-40x'}\underline{\underline{+6y'}}+93=0 \Rightarrow \left\{\left(\underbrace{2x'}_{u}\right)^2-2\cdot\underbrace{2x'}_{u}\cdot\underbrace{10}_{v}+\underbrace{10}_{v}^2\right\}+\left\{\underbrace{y'}_{u}^2+2\cdot\underbrace{y'}_{u}\cdot\underbrace{3}_{v}+\underbrace{3}_{v}^2\right\}+93-100-9=0 \Rightarrow$$

$$(2x'-10)^2+(y'+3)^2=16 \Rightarrow \left(2(x'-5)\right)^2+(y'+3)^2=16 \Rightarrow 4(x'-5)^2+(y'+3)^2=16 \; (:16)$$

$$\Rightarrow \frac{(x'-5)^2}{4}+\frac{(y'+3)^2}{16}=1$$

כאשר $b^2=16$, $a^2=4 \Leftarrow a=2, b=4$.
קיבלנו אליפסה מוזזת שמרכזה בנקודה $(5,-3)$.



כיוון ש- $P = I$, הדטרמיננטה היא 1 ומדובר במטריצת סיבוב $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
ולכן בכדי שהיא תהיה מטריצת היחידה $\theta = 0$ ולכן אין למעשה סיבוב. זה קורה כי A אלכסונית והצירים של x ו- y הם זהים לאלה של x' ו- y' .