

אלגברה לינארית 1 - תרגיל 11

הערות:

$Rspan(A) = R(A)$ = מרחב השורות של מטריצה A .

לוקטורים ב- $Rspan(A)$ אנו מתייחסים כ-**וקטורי עמודה**.

$Cspan(A) = C(A)$ = מרחב העמודות של מטריצה A .

$Null(A) = N(A)$ = מרחב האפס של מטריצה A .

(1) מצא מטריצות A, B עבורן:

א. $rank(AB) = rank(A) = rank(B)$.

ב. $rank(AB) = rank(A) < rank(B)$.

ג. $rank(AB) < rank(B)$ ו- $rank(AB) < rank(A)$.

(2) יהא $n \geq 2$. הוכח שלכל $0 \leq k \leq n$ קיימות מטריצות $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$rank(A + B) = k$ ו- $rank(A) = rank(B) = n$

(3) תהיינה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times m}$. הוכח:

א. $AB = 0 \iff$ קיים $x \in \mathbb{F}^n$ כך ש: $Bx = 0$.

ב. $AB = I_m$ וגם $BA = I_n \iff m = n$.

(I_n היא מטריצת היחידה מסדר $n \times n$)

(4) תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכח:

א. $rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$.

ב. אם מתקיים שוויון בסעיף א' אזי:

$Rspan(A) \cap Rspan(B) = \{0\}$ ו- $Cspan(A) \cap Cspan(B) = \{0\}$

(5) תהי $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

א. הוכח: $\mathbb{R}^n = Rspan(A) \oplus Null(A)$.

ב. מצא שדה \mathbb{F} עבורו סעיף א' לא מתקיים.