תרגיל 5

1. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

   (א) הטופולוגיה טריויאלית.

   (ב) לכל סדרה x_n ו $x \in X$ מתקיים $x_n \to x$ (כל סדרה מתכנסת לכל איבר)

פתרון. נניח שהטופולוגיה טריויאלית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x. צריך להוכיח ש $x_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $\xrightarrow{x_n \in X}$ החל מ n מסוים (במקרה $n = 1$) ולכן $x_n \to X$. בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $U \neq \emptyset, X$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \backslash U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \to x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

2. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

   (א) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{Z}$.

פתרון. ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{Z}$, נוכיח ש $a_n \to x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{Z}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{Z}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$ כי $x \in U$.

   (ב) האם קיימת סדרה שיש לה גבול יחיד? אם כן, תנו דוגמא. אם לא- הוכיחו.

פתרון. קיימת, למשל $a_n = 1$ סדרה זאת קבועה ולכן מתכנסת ל 1. נוכיח שזהו הגבול היחיד שלה. נניח בשלילה כי $a_n \to a \neq 1$ אז O_a סביבה פתוחה של a. לפי הגדרת הגבול ממקום כלשהוא $a_n \in O_a$ אבל $1 = a_n \in O_a$ אבל $1 \notin O_a$. סתירה.

3. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקו-סופית עליה.

   (א) תהי $\{x_n\} \subseteq X$ סדרה. הוכיחו שמתקיים אחד מהבאים:

      i. $\{x_n\}$ לא מתכנסת.

      ii. ל$\{x_n\}$ יש גבול יחיד.

iii. $\{x_n\}$ מתכנסת לכל איבר ב X.

פתרון. נניח כי $\{x_n\}$ מתכנסת ואין לה גבול יחיד. נניח כי $x'' \neq x'$ גבולות שלה. נקבל כי לכל איבר $a \in X$ קיים מיקום n_a שהחל ממנו הסדרה שונה מ a. הוכחה: יהא $a \in X$ אזי $\{a\}^c$ הוא סביבה פתוחה של x' או x'' ולכן לפי הגדרת הגבול החל ממקום מסוים כל איברי הסדרה נמצאים ב $\{a\}^c$ כלומר לא שווים ל a. כעת נוכיח כי כל $x \in X$ הוא גבול שלה. יהא $x \in X$ נתון ויהא U סביבה פתוחה של x. לפי הגדרת הטופולוגיה U^c סופי ולכן נוכל להגדיר $N = \max\{n_a | \, a \in U^c\}$ ולקבל כי החל ממיקום N איברי הסדרה $\{x_n\}$ שונים מכל איברי U^c ולכן בפרט ממקום זה איברי $\{x_n\}$ שייכים ל U כנדרש.

(ב) יהי Y מרחב טופולוגי מטריזבילי, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש f קבועה.

פתרון. נבחר תת קבוצה $\{x_n\}$ מעוצמה $\aleph_0$ ש ל X. טענה: $\{x_n\}$ כסדרה מתכנסת לכל איבר ב X. הוכחה: יהא $x \in X$ ותהא U סביבה פתוחה של x. מהגדרה U^c סופית ולכן ממקום כלשהוא בסדרה , איברי הסדרה$\{x_n\}$ נמצאים ב U כנדרש. כעת אם $x_n \to x$ אזי $f(x_n) \to f(x)$ כיוון ש f רציפה. כיוון שכל $x \in X$ הוא גבול של הסדרה $\{x_n\}$ נקבל כי כל $x \in X$ מקיים כי $f(x)$ הוא גבול של הסדררה $\{f(x_n)\}$. במרחב מטריזבילי הגבול יחיד ל $\{f(x_n)\}$ גבול יחיד שנסמנו y ומכאן נקבל שכל $x \in X$ מקיים $f(x) = y$.

(ג) הוכיחו ש(X, τ_{cof}) אינו מטריזבילי. (הוכיחו שבעבור קבוצה סופית הטופולוגיה הקוסופית היא מטריזבילית)

פתרון. במקרה ש X סופית אזי הטופולוגיה הקו-סופית מתלכדת עם הטופלוגיה הדיסקטית שהיא מטרזבילית. במקרה שלנו, X אינה סופית ונוכיח כי הוא אינו מטרזבילי. נניח בשלילה כי הוא מטרזבילי אזי $Id : X \to X$ רציפה ואינה קבועה. סתירה לסעיף הקודם.

4. הוכיחו שהרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

פתרון. נניח כי $f : X \to Y, g : Y \to Z$ רציפות (X, Y, Z מרחבים טופולוגיים). יהא U פתוחה ב Z ונרצה להוכיח כי $(g \circ f)^{-1}(U)$ פתוחה ב X אכן $g^{-1}(U)$ פתוחה ב Y כי g פתוחה ואז $f^{-1}(g^{-1}(U))$ פתוחה ב X כי f רציפה. כיוון ש

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

סיימנו.

5. יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A, B, C \subseteq X$ תתי קבוצות כך ש $C \subseteq A \cup B$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B.

פתרון. נכון. אם C פתוחה ב $A \cup B$ אז $A \cap C$ פתוחה ב A פשוט לפי הגדרה של טופולוגית תת מרחב. כנ"ל $B \cap C$ פתוחה ב B.

(ב) אם $A \cap C$ פתוחה ב A ו $B \cap C$ פתוחה ב B אז C פתוחה ב $A \cup B$.

פתרון. לא. ניקח $X=\mathbb{R}$ ו $A=C=\{0\}$ אז $A\cap C$ פתוחה ב A. ניקח $B=\mathbb{R}\backslash\{0\}$ אז $B\cap C=\emptyset$ פתוחה אבל $\{0\}$ לא פתוחה ב $A\cup B=\mathbb{R}$

6. (א) יהי X מרחב טופולוגי. ניקח תתי קבוצות $X \supseteq Y \supseteq Z$. הטופולוגיה של X משרה טופולוגיות תת מרחב על Y וזו משרה טופולוגית תת מרחב על Z. הראו שזו בדיוק טופולוגית תת המרחב ש X משרה על Z (אם הטענה הזאת הייתה לא נכונה היה מאוד קשה לדבר על תתי מרחבים).

פתרון. נכניס סימונים כאלה: τ היא הטפולוגיה של X. τ_Y ו τ_Z הן טפולוגיות התת מרחב על Y ו Z בהתאמה. כמו כן σ תהיה טופלוגיית תת המרחב ש (Y,τ_Y) משרה על Z. צריך להוכיח ש $\sigma=\tau_Z$. נוכיח הכלה דו כיוונית. נניח $A\in\sigma$ כלומר $A=Z\cap U$ כאשר $U\in\tau_Y$. לפי הגדרה $U=Y\cap V$ כאשר $V\in\tau$. לכן

$$A=Z\cap Y\cap V=Z\cap V$$

כאשר V פתוחה ב X. לפי הגדרה זה אומר ש $A\in\tau_Z$. מצד שני נניח $A\in\tau_Z$כלומר

$$A=Z\cap U$$

כאשר U פתוחה ב X. אז היות ש $Z\subseteq Y$ נקבל ש

$$A=Z\cap Y\cap U$$

ולפי הגדרה $Y\cap U\in\tau_Y$ ולכן

$$A\in\sigma$$

כנדרש. קיבלנו מה שרצינו.

(ב) הוכיחו כי טופולוגית תת מרחב של טופולוגיה קו-סופית היא בעצמה טופולוגיה קו-סופית.

פתרון. נניח X מרחב עם טופולוגיה קו סופית ו $Y\subseteq X$. צריך להוכיח שהקבוצות הסגורות ב Y הן בדיוק הקבוצות הסופיות. תהי $A\subseteq Y$ קבוצה סגורה אז

$$A=Y\cap U$$

כאשר U סגורה ב X כלומר U סופית ולכן גם A סופית. מצד שני נניח ש $A\subseteq Y$ סופית. אז

$$A=Y\cap A$$

אבל A סגורה ב X (כי היא סופית) ולכן היא גם סגורה ב Y. כנדרש.

7. תהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה, ויהי $A\subseteq X$. הוכיחו ש$f|_A:A\to Y$ רציפה.

פתרון. פתרון: תהא V פתוחה ב Y צ"ל כי $f|_A^{-1}(V)$ פתוחה ב A. אכן $f|_A^{-1}(V)=f^{-1}(V)\cap A$ כיוון ש f רציפה $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X ולכן $f|_A^{-1}(V)=f^{-1}(V)\cap A$ פתוחה ב A.

8. יהי (X,τ) מ״ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

9. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$-$ $A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

(ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

10. יהי (X,τ) מ"ט וA, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

(א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$