תרגיל 7

1. הוכח:
א. תת מרחב של B_1 הוא B_1.
ב. תת מרחב של T_3 הוא T_3.
פתרון:
1.א. יהי X מרחב שהוא B_1 ו$Y \subseteq X$. יהי $y \in Y$. בפרט, $y \in X$, ולכן קיים בסיס בן מניה לסביבות של y, $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. נטען כי $\{O_n \cap Y\}$ הוא בסיס לסביבות של y ב Y.
הוכחה: תהי $N \subseteq Y$ סביבה של y. כלומר, קיימת $y \in U \subseteq N$ פתוחה. U פתוחה ב$Y \Longleftarrow$ קיימת U' פתוחה ב X כך ש $U = U' \cap Y$. U' פתוחה בX וכן $y \in U' \Longleftarrow$ קיים n כך ש $O_n \subseteq U'$. אזי, $O_n \cap Y \subseteq U' \cap Y = U \subseteq N$.
כלומר, כל סביבה של y מכילה איבר מהקבוצה $\{O_n \cap Y\}$. כמו כן, ברור שלכל n, $O_n \cap Y$ הוא בעצמו סביבה של y בY כי הוא מכיל את y ופתוח בY מהגדרה.
לכן, האוסף הזה הוא בסיס לסביבות של y.
קיבלנו שלכל $y \in Y$ יש בסיס בן מניה$\Longleftarrow Y$ הוא מרחב B_1.
ב. יהי X מרחב T_3 ו $Y \subseteq X$. יהיו $A \subseteq Y$ קבוצה סגורה בY (בטופולוגית תת המרחב) ו$a \in Y$, $a \notin A$.
A סגורה ב$Y \Longleftarrow$ קיימת B סגורה בX כך ש $A = B \cap Y$.
$a \notin B$, אחרת, $a \in Y$ וגם $a \in B \Longleftarrow a \in A$.
X מרחב T_3 ולכן קיימות $a \in U, B \subseteq V$ קבוצות פתוחות כך ש $U \cap V = \emptyset$.
נקח $U' = U \cap Y, V' = V \cap Y$ להיות הסביבות המפרידות.
ברור ש $a \in U', A \subseteq V'$ וכן ש $U' \cap V' = \emptyset$.
לכן Y הוא מרחב T_3.

2. תהי X קבוצה לא בת מניה. הוכח: (X, τ_{coc}) היא לא B_1 כאשר

$$\tau_{coc} = \{O \subseteq X | |O^c| \leq \aleph_0\}$$

פתרון:
יהי $x \in X$. נניח שיש בסיס בן מניה לסביבות של x. נסמנו $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. כל O_n מכיל קבוצה פתוחה$\Longleftarrow$המשלים שלו מוכל בקבוצה בת מניה $\Longleftarrow$ המשלים הוא בן מניה. (לכן, כל O_n פתוח).
לכל n, $|O_n^c| \leq \aleph_0$.
$|\cup O_n^c| \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
X אינו בן מניה, לכן יש $y \in X$ כך ש $y \notin \cup O_n^c$. הקבוצה $\{y\}^c$ היא סביבה של x אבל לא מכילה אף אחת מהקבוצות הבסיסיות. אחרת, יש n כך $\Longleftarrow \{y\} \subseteq O_n^c \Longleftarrow y \in \cup O_n^c$. $O_n \subseteq \{y\}^c$. סתירה.
לכן אין לx בסיס בן מניה $\Longleftarrow X$ אינו B_1.

3. א. יהי X מרחב טופולוגי. הוכח: X רגולרי אמ"ם כל קבוצה סגורה בX שווה לחיתוך כל הסביבות הסגורות שלה.
ב. יהי X מרחב T_3 ו$A, B \subseteq X$ תת קבוצות סגורות זרות, כך שלפחות אחת מהן סופית, אז יש להן סביבות מפרידות.
פתרון:
א. $\Longleftarrow$ נניח ש X רגולרי. תהי $A \subseteq X$ קבוצה סגורה. ברור ש A מוכלת בכל הסביבות הסגורות שלה.
תהי $a \notin A$. יש $a \in U, A \subseteq V$ פתוחות כך ש $U \cap V = \emptyset$.
אזי, $V \subseteq U^c \Longleftarrow U^c$ היא סביבה סגורה של A שa לא נמצאת בה. לכן, a לא שייכת לחיתוך הסביבות הסגורות של A. הדבר נכון לכל $a \notin A$, ולכן A שווה לחיתוך הסביבות הסגורות שלה.
$\Longrightarrow$ תהי $a \notin A$. מכיוון ש A שווה לחיתוך כל הסביבות הסגורות שלה, קיימת סביביה סגורה V של A כך ש $a \notin V$. כלומר, $A \subseteq U \subseteq V$ עבור U פתוחה וV סגורה, ו $a \in V^c$.
אזי, V^c פתוחה ו$U \cap V^c = \emptyset$.
מצאנו סביבות מפרידות לa וA.
מסקנה: X הוא מרחב רגולרי.
ב. יהי X מרחב T_3 וA, B שתי קבוצות סגורות זרות בX. נניח בה"כ ש A סופית.
$A = \{a_1, ..., a_n\}$.
לכל i, $a_i \notin B$, ולכן קיימות $a_i \in U_i, B \subseteq V_i$ קבוצות פתוחות זרות.
נקח $U = \cup U_i, V = \cap V_i$. הן פתוחות כאיחוד של קבוצות פתוחות, וחיתוך סופי של קבוצות פתוחות. כמו כן, $A \subseteq U, B \subseteq V$.
שימו לב ש $U \cap V = \emptyset$.
כלומר, U ו V הן הסביבות המפרידות.

4. הגדרה: קבוצה נקראת G_δ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות פתוחות.
א. הוכח: אם X הוא T_1 וB_1 אז כל נקודון $\{x\} \subseteq X$ הוא G_δ.
ב. הוכח: שתי התכונות הכרחיות. כלומר, אם נוריד את אחת התכונות, הטענה לא בהכרח תהיה נכונה.
פתרון:
א. יהי $x \in X$. מכיוון שX B_1, יש לו בסיס בן מניה, נסמנו $\{O_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. כל בסיסה של x מכילה קבוצה פתוחה סביב x, נסמן $x \in U_n \subseteq O_n$. נוכיח ש $\{x\} = \cap U_n$.
ברור ש $\{x\} \subseteq \cap U_n$.
יהי $y \neq x$. מכיוון ש X מרחב T_1קיימת קבוצה פתוחה $x \in V$ כך ש $y \notin V$. V מכילה קבוצה מהבסיס. כלומר קיים n כך ש $U_n \subseteq O_n \subseteq V$. לכן $y \notin U_n$.
$\cap U_n = \{x\} \Longleftarrow y \notin \cap U_n \Longleftarrow$.
ב. ניתן דוגמא למרחב שהוא B_1 ולא T_1 ולא מקיים את התכונה:
נגדיר על $\mathbb{R}$ את הטופולוגיה הבאה: הקבוצות הפתוחות הן הקבוצות מהצורה: $[r, \infty)$ לכל $r \in \mathbb{R}$. המרחב הוא B_1 כי לכל איבר יש בסיס בגודל 1. לכל $r \in \mathbb{R}$, כל קבוצה פתוחה סביב r מכילה את הקבוצה הפתוחה $[r, \infty)$. היא לא B_1 כי אם $x < y$ אז כל קבוצה פתוחה $x \in U$ מקיימת שגם $y \in U$.
אף נקודון הוא לא G_δ, כי אם $x \in \cap O_n$ עבור O_n פתוחות, אזי כל קבוצה מכילה גם את כל הקטע $[x.\infty)$, ולכן $[x, \infty) \subseteq \cap O_n$. כלומר $\{x\} \neq \cap O_n$.
כעת ניתן דוגמא למרחב שהוא T_1 ולא B_1 ולא מקיים את התכונה.
נקח את הטופולוגיה הקוסופית על קבוצה X שהיא לא בת מניה.
בראינו בכיתה שמרחב זו הוא T_1 ולא B_1.

יהי נקודון $\{x\}$. אם $\{x\} = \cap O_n$ אז $X \setminus \{x\} = \cup O_n^c$ ־ איחוד בן מניה של קבוצות סופיות שהוא קבוצה סופית. סתירה.

5. א.תנו דוגמא למרחב שהוא T_2 אבל לא T_3 (רמז: היעזרו בתרגילי הבית הקודמים)
ב. אם $\tau \subseteq \sigma$ שתי טופולוגיות על X, אז לכל $i \in \{0,1,2\}$ אם (X,τ) היא T_i אז גם (X,σ) הוא T_i. הטענה לא נכונה לגבי T_3.
פתרון:
א. בתרגיל 4 שאלה 6 א' הגדרנו את הטופולוגיה הבאה על $\mathbb{R}$:
$S = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. הקבוצות הסגורות הן קבוצות מהצורה $C \cup T$ עבור $C \subseteq S$ וT סגורה בטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$.
קל לראות שהיא יותר חזקה (מכילה את) מהטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$. לכן, לפי סעיף ב' זה אומר שהיא T_2. נוכיח שהיא לא T_3.
הקבוצה S סגורה בטופולוגיה הזאת. נראה שלא ניתן להפריד אותה מהנקודה 0.
ובכן, אם $O \supseteq S$ פתוחה, אז המשלים שלה סגור וזר לS, כלומר, הוא סגור בטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$, ולכן O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
תהי $0 \in U$קבוצה פתוחה.
נשים לב שכל קבוצה פתוחה בטופולוגיה היא מהצורה $C \cap T$ עבור $C \subseteq S^c$ וT פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
אז גם U הוא מהצורה הזאת. $U = C \cap T$ כנ"ל.
$T \in 0 \Longleftarrow T \cap S \neq \emptyset$. T וO הן קבוצות פתוחות בטופולוגיה האוקלידית שחיתוכן לא ריק, לכן החיתוך שלהן פתוח בטופולוגיה האוקלידית ולא ריק $\Longleftarrow |T \cap O| = \aleph$. (כי קבוצה פתוחה בטופולוגיה האוקלידית בהכרח מכילה קטע).
אם $O \cap U = \emptyset$ אז $C \cap T \cap O = \emptyset$. כלומר, $T \cap O \subseteq C^c \subseteq S$. בסתירה לכך ש $|T \cap O| = \aleph$ ואילו $|S| = |\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}| = \aleph_0$.
ב. נוכיח עבור T_2. ההוכחות לT_0 וT_1 זהות.
יהיו $x \neq y \in X$. בגלל ש(X,τ) T_2 זה אומר שיש $U,V \in \tau$ כך ש $x \in U, y \in V$ וכן $U \cap V = \emptyset$.
$\tau \subseteq \sigma$, לכן $U,V \in \sigma$, ומצאנו סביבות מפרידות לxו y לפי הטופולוגיה σ. לכן (X,σ) הוא T_2.
הטופולוגיה מסעיף א' היא יותר חזקה מהטופולוגיה האוקלידית על $\mathbb{R}$ שהיא T_3, אולם כמו שראינו בסעיף א' הטופולוגיה הזאת היא לא T_3.

6. א. תנו דוגמא לשני מרחבים X, Y כך שX הומיאומרפי לתת מרחב של Y, Y הומיאומורפי לתת מרחב של X, אבל X וY לא הומיאומורפיים.
ב. הוכיחו: שלמות היא לא תכונה טופולוגית. כלומר, אינה נשמרת תחת הומיאומורפיזם.
פתרון:
א. נקח $X = \mathbb{R}$ ו $Y = [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$ עם טופולוגית תת המרחב. ברור ש Y הומויאומורפי לתת מרחב של X־ הוא הומיאומורפי לעצמו.
כמו כן, $\mathbb{R}$ הומיאומורפי ל $(-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}) \subseteq [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$, באמצעות הפו $f(x) = \tan x$ אשר היא וההופכית שלה רציפות.
אולם, $\mathbb{R} \not\cong [-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$, למשל כי ב $\mathbb{R}$ כל נקודה שנוציא־ נקבל מרחב לא קשיר. ואילו ב$[-\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}]$, אם נוציא נקודת קצה־ עדיין נשאר עם מרחב קשיר.

ב. כמו שראינו $\mathbb{R}$ הומיאומורפי ל $(-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2})$. כידוע $\mathbb{R}$ שלם, ו$(-\frac{\Pi}{2},\frac{\Pi}{2})$ לא.

7. הוכיחו/הפריכו:

$(1,2)\cup(3,4)\cong(5,7)\cup\{0\}$.

הפרכה: למרחב $(5,7)\cup\{0\}$ יש נקודה (0) שאם נוריד אותה נקבל מרחב קשיר. אולם, במרחב $(1,2)\cup(3,4)$, לכל נקודה שנוריד, נקבל מרחב לא קשיר.