

תרגיל 4 - אינפי 2 לתיכוניסטים

24 באפריל 2018

שאלה 1

תהי פונקציה

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ותהי f פונקציה כלשהי המקיימת: $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(D(x))$

הוכיחו או הפריכו: f אינטגרבילית בקטע $[a, b]$

רמז: פונקציה קבועה אינטגרבילית בכל קטע סגור $[a, b]$.

שאלה 2

בהרצאה קיבלתם כמטלה לקריאה עצמית לקרוא על קבוצת קנטור.

הגדרה נוספת של קבוצת קנטור:

$$C = \{x \in [0, 1] \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n}, a_n \in \{0, 2\} \text{ for every } n \geq 1\}$$

ולכן ניתן לבטא את קבוצת קנטור C כקבוצה של מספרים ממשיים מהצורה

$$0.a_1a_2a_3\dots a_n\dots$$

כאשר $a_n = 0$ or 2 עבור כל $n \geq 1$ (הייצוג הזה נקרא ייצוג טרינארי)

חזרה לשאלה: קבוצה A תקרא מושלמת אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י

איברים מ- A .

במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות.

הראו כי קבוצת קנטור C היא מושלמת.

רמז:

הציגו איבר $x \in C$ כטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 3^{-n}$ ומצאו סדרת נקודות $x_n \subset C$

כך ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$