אינפי 3

תרגול 5

תזכורת-דיפרנציאביליות:

פונקציה היא דיפרנציאבילית אם אפשר להציג אותה כקירוב לינארי (טוב). כלומר:

- O (אות) שואף ל-0 (מספר) כאשר $h_1, h_2, \ldots h_n$ שואפים לאפס.
- פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה ← רציפה בנקודה והקבועים A_i הם הנגזרות החלקיות
- תנאי מספיק (ולא הכרחי): הנגזרות החלקיות <u>קיימות ורציפות</u>
- בנוסף, הקשר לנגזרת כיוונית: כאשר הפונקציה דיפרנציאבילית, מתקיים:

$$D_h f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \nabla f(a) \cdot h$$

דיפרנציאל

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה

$x=(x_1,\dots,x_n)$. לכן, אפשר לכתוב:

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}(x)\,h_i+o(\|h\|)$$

ולכן:

$$f(x+h)-f(x)\approx\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}(x)\,h_i$$

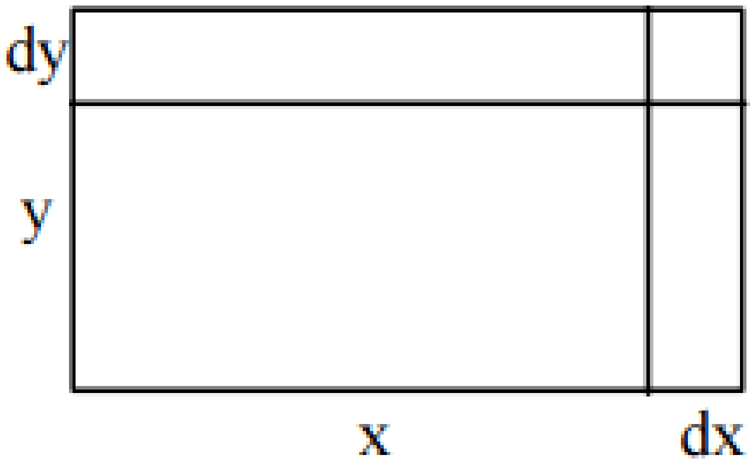
הביטוי $\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}(x)\,h_i$ נקרא **הדיפרנציאל** של f, ונסמנו ב- df.

דוגמא:

נתונה הפונקציה המתארת שטח מלבן: z=xy.

אם נוסיף ל-x את dx ול-y את dy, השינוי בשטח

המלבן יהיה, לפי נוסחת הדיפרנציאל:



$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = ydx + xdy$$

נבדוק כעת בדרך אחרת, עפ"י הצבה בפונקציה:

z=(x+dx)(y+dy)=xy+xdy+ydx+dxdy

כלומר: dz=xdy+ydx+dxdy

אבל, כאשר dx,dy הם קטנים מאוד, dxdy הוא זניח ונקבל כמובן:

dz=ydx+xdy

תרגיל:

1. תוך שימוש בדיפרנציאל, קרבו את הביטוי $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$.

פתרון:

אנו כמובן צריכים לעבוד ברדיאנים, כלומר:

$$29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, 46^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

לכן, הנקודה הקרובה היא מן הסתם $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ והפונקציה היא:

$$f(x, y) = \sin x \tan y$$

והפונקציה אכן דיפרנציאבילית בנקודה, מה שמאפשר להשתמש בדיפרנציאל.

השינויים בין הנקודה הקרובה לנקודה שלנו הם: $h_1 = -\frac{\pi}{180}, h_2 = \frac{\pi}{180}$ ולכן:

$$f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) \approx f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{180}$$

הנגזרות הן:

$$f_x(x,y) = \cos x \tan y, f_y(x,y) = \frac{\sin x}{\cos^2 y}$$

ולכן:

$$f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

כמו כן, $f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ובסך הכל:

$$\sin 29^\circ \tan 46^\circ \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) + \frac{\pi}{180} \approx \frac{1}{2}$$

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה.

נסמן: $f(x_1,...,x_n)=(f_1(x_1,...,x_n),...,f_m(x_1,...,x_n))$ כאשר כל f_i היא פונקציה סקלרית.

נגדיר את מטריצת יעקובי להיות:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . & . & . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

היעקוביאן הוא הדטרמיננטה של מטריצת היעקובי.

את מטריצת היעקובי של f בנקודה a נסמן $D_a(f)$ או $J_f(a)$.

תרגיל:

מצאו את מטריצת היעקובי של הפונקציה

$$f(x,y) = (x^2 + xy + 1, y^2 + 2)$$

פתרון:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

דיפרנציאביליות בפונקציה וקטורית-משפט:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה. f דיפרנציאבילית אם ורק אם כל אחת מהפונקציות

f_i הן דיפרנציאביליות.

אם f דיפרנציאבילית בנקודה a אזי:

$$df_a(h)=J_f(a)h$$

כלל השרשרת:

תזכורת:

תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות כך ש$-g$ גזירה בנקודה x ו$-f$ גזירה בנקודה $g\left(x\right)$.

אזי:

$$\left(f\circ g\right)'\left(x\right)=f'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

כלל השרשרת:

תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(x_1,\dots x_n)$, כאשר כל אחד מהמשתנים הוא פונקציה דיפרנציאבילית $x_i:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ בנקודה $(u_1,\dots u_m)$ בעצמו:

$$f=f\left(x_1\left(u_1,\dots u_m\right),\dots,x_n\left(u_1,\dots,u_m\right)\right)$$

כלומר, פונקציה מורכבת. אזי:

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial u_i}$$

תרגיל:

חשבו את הנגזרת $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1}$, כאשר: $w(x,y,z)=x^3y^2z^4$, וכאשר:

$$x=t^2, y=t+2, z=2t^4$$

פתרון: כל הפונקציות דיפרנציאביליות והכל בסדר, ולפי כלל השרשרת:

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=$$

$$=3x^2y^2z^4\cdot 2t+2x^3yz^4\cdot 1+4x^3y^2z^3\cdot 8t^3=$$

כאשר $t=1$, $x=1, y=3, z=2$ ולכן:

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1}=864+96+2304=3264$$

אפשר היה גם להציב ולקבל:

$$w\left(t\right)=\left(t^{2}\right)^{3}\cdot\left(t+2\right)^{2}\cdot\left(2t^{4}\right)^{4}=16t^{22}\cdot\left(t+2\right)^{2}$$

לגזור לפי t ולהציב t=1.

כלל השרשרת בפונקציה וקטורית:

תהי $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה a ו-$f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$

דיפרנציאבילית בנקודה $g(a)$, אזי:

$$J_a(f\circ g)=J_{g(a)}(f)\cdot J_a(g)$$

כלומר: היעקובי של f בנק' g(a) כפול היעקובי של g בנק' a

תרגיל:

מצאו את $dg_a(h)$ עבור $g = \phi \circ f$, $a = (1,1)$, $h = (3, \frac{1}{2})$ כאשר:

$$f(x,y) = (x^2 + xy + 1, y^2 + 2)$$

$$\phi(u,v) = (u+v, 2u, v^2)$$

<u>פתרון:</u>

כל הרכיבים של שתי הפונקציות דיפרנציאביליים (כי הנגזרות החלקיות שלהם קיימות ורציפות), ולכן שתי הפונקציות דיפרנציאביליות וניתן להפעיל את כלל השרשרת.

$$J_\phi\left(u,v\right)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&2v\end{pmatrix}$$

$$J_f\left(x,y\right)=\begin{pmatrix}2x+y&x\\0&2y\end{pmatrix}$$

בנקודה $(1,1)$מתקיים $(3,3)=f(1,1)$ ולכן סה"כ נקבל:

$$J_g(a)=J_\phi(f(a))J_f(a)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}$$

ומכיוון שהפונקצייה דיפרנציאבילית:

$$dg_a(h)=J_g(a)h=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\frac{1}{2}\\19\\6\end{pmatrix}$$

תרגיל:

חשבו את מטרצית יעקובי בנקודה $(0,0)$ של הפונקציה $g = f \circ \phi$ כאשר:

$$\phi(x,y) = (\frac{1}{2}(e^y + cosx), \frac{1}{2}(e^x + cosy))$$

ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ומטריצת יעקובי שלה בנקודה היא $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון:

שוב, קל לראות שהנגזרות החלקיות של כל הרכיבים קיימות ורציפות ולכן ϕ דיפרנציאבילית.

$\phi(0,0) = (1,1)$ ונתון ש$-f$ דיפרנציאבילית בנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן להפעיל את כלל השרשרת בנקודה $(0,0)$.

$$J_g(0,0) = J_f(1,1)J_\phi(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -sin0 & e^0 \\ e^0 & -sin0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

דוגמה שבה כלל השרשרת אינו מתקיים:

$x = 2t, y = t$ ו:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

עבור $t = 0$, למשל, $x = y = 0$ והנקודה המתאימה היא $(0,0)$. לפי כלל השרשרת:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = f_x(0,0) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + f_y(0,0) \cdot \frac{dy}{dt}(0)$$

אפשר לראות ש: $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ ולכן:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = 0$$

אך אם נסתכל על f כעל פונקציה של משתנה יחיד:

$$f(x,y) = f(2t,t) = \frac{4t^2 \cdot t}{4t^2 + t^2} = \frac{4}{5}t$$

ולכן: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{4}{5}$ ובפרט:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0) = \frac{4}{5} \neq 0$$

זאת מכיוון שהפונקציה אינה דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$, ולכן תנאי כלל השרשרת אינם מתקיימים.

דיפרנציאלים מסדר גבוה

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ פונקציה. הדיפרנציאל מסדר n של הפונקציה הוא:

$$d_a^n f(x_1,...,x_m) = \sum_{\alpha_1+...+\alpha_m=n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot ... \cdot \alpha_m!} \cdot \frac{\partial^n f}{\partial^{\alpha_1} x_1 ... \partial^{\alpha_m} x_m}(a) \cdot dx_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot dx_m^{\alpha_m}$$

תרגיל:

תהי $f(x,y)=e^x cosy$. חשבו את $d^3_{(0,0)}f, d^3_{(0,\frac{\pi}{2})}f$.

פתרון:

נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה עד לסדר 3. מסדר 1:

$$f_x = e^x cosy \qquad f_y = -e^x siny$$

מסדר 2:

$$f_{yy} = -e^x cosy \qquad f_{xx} = e^x cosy$$

ומסדר 3:

$$f_{yyy} = e^x siny \qquad f_{xxy} = -e^x siny$$

$$f_{xxx} = e^x cosy \qquad f_{yyx} = -e^x cosy$$

לפי הנוסחה לדיפרנציאל בנקודה $(0,0)$:

$$\frac{3!}{3!0!}f_{xxx}(0,0)h_1^3+\frac{3!}{2!1!}f_{xxy}(0,0)h_1^2h_2+\frac{3!}{1!2!}f_{yyx}(0,0)h_1h_2^2+\frac{3!}{3!0!}f_{yyy}(0,0)h_2^3$$

כאשר הסימון הוא $h_i=dx_i$.

בנקודה $(0,0)$שלנו:

כאשר הסימון הוא $h_i=dx_i$.

בנקודה $(0,0)$שלנו:

$f_{xyy}(0,0)=-1$ $\qquad$ $f_{xxx}(0,0)=1$

$f_{yyy}(0,0)=0$ $\qquad$ $f_{xxy}(0,0)=0$

נקבל:

$$d^3_{(0,0)}f = h_1^3 - 3h_1h_2^2$$

בנקודה $(0, \frac{\pi}{2})$:

$$f_{xxx} = 0, f_{xxy} = -1, f_{xyy} = 0, f_{yyy} = 1$$

ולכן:

$$d^3_{(0,\frac{\pi}{2})}f = h_2^3 - 2h_1^2h_2$$