תזכורת:

משפט הבסיס של הילברט: אם R חוג נותרי משמאל/מימין אזי חוג הפולינומים $R[x]$ גם נותרי משמאל/מימין

הוכחה:

יהי $I \lhd R[x]$ אידיאל שמאלי (עבור נותרי מימין ההוכחה דומה). צריך להוכיח כי I נוצר סופית

לכל $n\in N$ נגדיר $J_n = \{r\in R \mid$ r הוא המקדם המוביל של $f\in I, \deg f\le n\} =$

$= \{r\in R\mid$ r הוא המקדם המוביל של $f\in I, \deg f = n\}$

(כי $x^\ell f(x)\in I \Leftarrow f(x)\in I$)

$J=\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = \{r\in R\mid$ r הוא המקדם המוביל של $f\in I\}$

הוכחנו כי $J_n, J\lhd R$ אידיאלים שמאליים, לכן נוצרים סופית, כי R נותרי.

יהי $J=(r_1,\dots,r_k)$. נבחר $f_i\in I$ כך ש r_i המקדם המוביל של f_i, לכל $1\le i\le k$.

נבחר $N=\max\{\deg f_1,\dots,\deg f_k\}$. לכל $1\le j\le N$ יהי $J_j = (r_{1_j},\dots,r_{k_j j})$

יהי $f_{ij}\in I$ (לכל $1\le i\le k$) כך ש (1) $\deg f_{ij}=j$, (2) המקדם המוביל של f_{ij} הוא r_{ij}

יהי $I'=(f_1,\dots,f_k,f_{ij})_{\substack{1\le j<N\\ 1\le i\le k_j}}$

ברור כי I' נוצר סופית וכי $I'\subseteq I$. צריך להוכיח $I\subseteq I'$, ואז נקבל כי $I=I'$ נוצר סופית. נניח בשלילה ש $I\not\subseteq I'$ אזי קיים $g\in I$ כך ש $g\notin I'$. נטפל בשני מקרים.

מקרה 1:

$\deg g\ge N$. אזי $g=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$

$a_n=b_1r_1+b_2r_2+\dots+b_kr_k \Leftarrow a_n\in J \Leftarrow g\in I$ עבור $b_1,\dots,b_k\in R$ מתאימים, כאשר $r_1,\dots,r_k$ הם היוצרים של J שנקבעו למעלה. יהי

$$h=b_1x^{\deg g-\deg f_1}f_1+b_2x^{\deg g-\deg f_2}f_2+\dots+b_kx^{\deg g-\deg f_k}f_k$$

כיוון ש $\deg g\ge N\ge\deg f_i$ לכן $\deg g-\deg f_i\ge 0$

סך הכל כל המחוברים של h ממעלה $n=\deg g$ והמקדם המוביל הינו

$a_n = b_1r_1 + b_2r_2 + \dots + b_kr_k$

אזי $h = a_nx^n +$ (מונומים ממעלה נמוכה יותר). ברור כי $h\in I'$. $g = a_nx^n +$ (מונומים ממעלה נמוכה יותר)

לכן, $\deg(g-h) < \deg g$. מצד שני $h\in I'\subseteq I \Rightarrow g-h\in I$. לפי המינימליות של $\deg g$

מקבלים $g-h\in I'$. אזי $g = \underbrace{(g-h)}_{\in I'} + \underbrace{h}_{\in I'} \in I'$ בסתירה.

מקרה 2:

$\deg g = n < N$. אזי $g = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ $\quad a_n\in J_n \Rightarrow a_n = b_1r_{1n} + \dots + b_{k_n}r_{k_n,n}$

ניקח $h = b_1f_{1n} + \dots + b_{k_n}f_{k_n,n}$ אזי $h\in I'$, ל-h יש את אותה המעלה ואותו

מקדם מוביל כמו ל-g. אזי $\deg(g-h) < \deg g$, כמו קודם מקבלים סתירה

תוצאה:

לכל $n\in\mathbb{N}$, בהינתן חוג נותרי משמאל/מימין R, חוג הפולינומים ב-n נעלמים

$R[x_1,\dots,x_n]$ גם נותרי משמאל/מימין.

הוכחה:

באינדוקציה $R[x_1,\dots,x_n] = R[x_1,\dots,x_{n-1}][x_n]$

תוצאה:

יהי F שדה. נזכיר כי $V\subset F^n$ היא קבוצה אלגברית אם אפשר להגדיר אותה

כקבוצה בה אין אוסף פולינומים מתאפס. כלומר, $S\subset F[x_1,\dots,x_n]$ יהי $I=(S)$ (האידיאל הנוצר על ידי S)

אזי $V = Z(I) = \{(a_1,\dots,a_n)\in F^n \mid f(a_1,\dots,a_n)=0 \quad f\in I \text{ לכל }\}$

לפי מה שהוכחנו, $F[x_1,\dots,x_n]$ נותרי (כי כל שדה נותרי) לכן I נוצר סופית

$I = (f_1,\dots,f_k)$

לכן $V = \{(a_1,\dots,a_n)\in F^n \mid f_1(a_1,\dots,a_n)=0,\dots,f_k(a_1,\dots,a_n)=0\}$

V מוגדרת על ידי ההתאפסות של מספר סופי של פולינומים.

הגדרה:

יהי R חוג. תהי $S\subset R$ תת קבוצה. תת החוג הנוצר על ידי S הוא תת החוג הכי קטן $R'\subseteq R$ כך ש- $S\subset R'$. $R'=\{s_{11}s_{12}s_{13}\cdot\ldots\cdot s_{1n_1}+s_{21}s_{22}\cdot\ldots\cdot s_{2n_2}+\ldots+s_{k1}\cdot\ldots\cdot s_{kn_k} \mid s_{ij}\in S\cup\{1\}\cup(-S)\cup\{-1\}\}$

הגדרה: יהי $R\subset T$ חוגים. תת-החוג של T שנוצר מעל R על ידי קבוצה S הוא תת החוג הנוצר על ידי $R\cup S$, כלומר תת החוג הכי קטן של T שמכיל את R כתת חוג וגם מכיל את S

דוגמא:

$R\subset T$ חוגים חילופיים. יהי $t\in T$. החוג הנוצר על ידי t מעל R הוא

$$R[t]=\{t_0+r_1t+\ldots+r_nt^n \mid n\geq 0,\ r_i\in R\}$$

חוג R' נקרא נוצר סופית מעל תת-חוג R. אם הוא נוצר סופית מעל R כתת חוג של עצמו. $t_i\in R'$ $R'=R[t_1,\ldots,t_k]$

תוצאה:

יהי R חוג שנוצר סופית מעל חוג נותרי (לדוגמא מעל שדה, ומעל $\mathbb{Z}$) אזי R נותרי

הוכחה:

$$R=A[t_1,\ldots,t_k]=\{\sum a_{i_1,\ldots,i_k}t_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot t_k^{n_k}\}$$

דוגמא:

$R=\mathbb{Z}[x]/(x^3)$. R נוצר מעל $\mathbb{Z}$ על ידי $t=x+(x^3)$ (המחלקה של x)

$$t^3=x^3+(x^3)=0+(x^3)$$

בחזרה להוכחה:

נגדיר הומומורפיזם $\varphi:A[x_1,\ldots,x_k]\to R$

חוג פולינומים ב-k נעלמים מעל A

$\varphi(x_i)\to t_i$

$$\varphi(\sum a_{i_1}a_{i_2}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}x_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot x_k^{n_k})=\sum a_{i_1}\cdot\ldots\cdot a_{i_k}t_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot t_k^{n_k}$$

לכן φ על, ולפי משפט האיזו' הראשון $R\simeq A[x_1,\ldots,x_k]/\ker\varphi$

אבל הנחנו A נותרי $\Leftarrow A[x_1,\ldots,x_k]$ נותרי. אך מנה של חוג נותרי היא נותרית, לכן R נותרי

תרגיל: אם R נותרי מימין/משמאל $\Leftarrow$ החוג $R[[x]]$ של טורי חזקות גם נותרי מימין 11.

משמאל $\qquad R[[x]] = \{\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k\}$

$I \triangleleft R[[x]] \mapsto$ נגדיר של המקדמים של מונומים עם מעלה מינימלית $= \{ r_k$ המקדם הלא אפסי עם מינימלי $\} \cup \{0\}$

$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k$

הגדרה: יהי R חוג (לא בהכרח חילופי). R-מודול שמאלי (ימני) הוא קבוצה M עם שתי פעולות:

1) חיבור $M \times M \to M$, $(m_1,m_2) \mapsto m_1+m_2$

2) כפל סקלרי: $R \times M \to M$, $(r,m) \mapsto rm$ (עבור ימני $M \times R \to M$, $(m,r) \to mr$)

כך ש:

1) M עם חיבור היא חבורה אבלית

2) לכל $r,s \in R$, $m \in M$: $(r+s)m = rm+sm$, $r(sm) = rsm$, $1 \cdot m = m$

3) לכל $r \in R$, $m,n \in M$: $r(m+n) = rm+rn$

עבור מודול ימני:
$m(r+s) = mr+ms$
$(ms)r = m(sr)$
$m \cdot 1 = m$
$(m+n)r = mr+nr$

הערה: אם R חילופי, M R-מודול שמאלי, אזי הכפל הסקלרי $mr = rm$ מעניק ל-M מבנה של R-מודול ימני.

דוגמאות:

1) אם $F = R$ הוא שדה, אז R-מודול $\Leftrightarrow$ מרחב וקטורי מעל F

2) לכל חבורה אבלית M יש מבנה יחיד של $\mathbb{Z}$-מודול (משמאל)

$1 \cdot m = m, \quad n \cdot m = \underbrace{m+\dots+m}_{n \text{ פעמים}} \underset{n \text{ אם שלילי}}{=} (-m)+\dots+(-m)$

3) $M = R^n = \{(r_1,\dots,r_n) : r_i \in R\}$ חיבור איבר-איבר.

$r(r_1,\dots,r_n) = (rr_1,\dots,rr_n)$

זה מודול חופשי מעל R

4) יהי M R-מודול. יהי $n\in\mathbb{N}$, $M^n=\underbrace{M\times\ldots\times M}_{n \text{ פעמים}}$. באופן טבעי ניתן ל-$M^n$ מבנה של $\underbrace{M_n(R)}_{\text{מטריצות עם איברים ב-}R}$-מודול

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ \vdots & & \\ r_{n1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11}m_1+\ldots+r_{1n}m_n \\ \\ r_{n1}m_1+\ldots+r_{nn}m_n \end{pmatrix}$$

$\in M_n(R)$ $\quad\in M^n$