הרצאה 14

אפשר להגיש את שתי התרגילים הבאים בעוד שבועיים, המרצה יבדוק ויתן ציון.

1) $f(x) = \left\| x \right\|^{\gamma}, \gamma \in 2\mathbb{N}-1, x \in \mathbb{R}^n$. צ"ל $\forall r < \gamma : f \in C^r(\mathbb{R}^n)\ ; \forall r \geq \gamma : f \notin D^r(\mathbb{R}^n)$

2) $f(0,0)=0 \quad f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.

$f \in D^1(\mathbb{R}^2) - C^1(\mathbb{R}^2)$.

$$(a) f(x,y) = (x^2+y^2)^2 \sin\frac{1}{x^2+y^2}$$
$$(b) f(x,y) = (x^2+y^2)^3 \sin\frac{1}{x^2+y^2}$$

מכל מקרה מצא r מקסימלי כך ש$f \in D^r(\mathbb{R}^2)$ וr מקסימלי כך ש$f \in C^r(\mathbb{R}^2)$.

טור טיילור

$$f \in C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$$
$$f(x) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f(a)(x-a)^{\alpha} + R_r f(a, x-a)$$
$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha} f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^{\alpha}$$

אם U קמורה אזי

$$|D^{\alpha} f(x)| \leq M$$
$$|R_r f| \leq \frac{M}{(r+1)!}\left(\sqrt{n}\right)^{r+1} \left\| x-a \right\|^{r+1}$$

הגדרה

אומרים שפונ' f אנליטית אם לכל $a \in U$ קיים $\delta > 0$ כך ש

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} D^{\alpha}(a)(x-a)^{\alpha} \quad x \in B_{\delta}(a)$$

$$\mathrm{A(U)} = \{\text{קבוצת כל הפונקציות האנליטיות ב } - \mathrm{U}\}$$

f אנליטית אם $|R_r f| \xrightarrow{r\to\infty} 0$.

$$\lim_{r\to\infty} M_{r,\delta} \frac{\left(\sqrt{n}\right)^{r+1}}{(r+1)!} \delta^{r+1} = 0$$
$$M_{r,\delta} \coloneqq \max_{|\alpha|=r+1} \sup_{x\in B_{\delta(a)}} |D^{\alpha} f(x)|$$

דוגמא

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{||x||^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

בדוק : לא אנליטית $\forall\alpha : D^\alpha f(0)=0, f\in C^\infty(\mathbb{R}^n), f$

קיצונים מקומיים

הגדרה

$$\Omega\subset\mathbb{R}^n;\ \ f:\Omega\to\mathbb{R}$$

אומרים כי $a\in\Omega$ נקודת מינימום מקומי אם קיים $\delta>0$ כל שלכל $x\in\Omega\cap B_\delta(a)$ מתקיים $f(x)\geq f(a)$

אם מתקיים $f(x)>f(a)$ לכל $x\in\Omega\cap B_\delta(a)$ נאמר כי a נקודת מינימום ממש.

$a\in\Omega$ נק' מקסימום מקומי אם היא נק' מינימום בפונקציה $-f$.

$a\in\Omega$ נק' מקסימום ממש אם היא נק' מינימום ממש בפונקציה $-f$.

אם $a\in\Omega$ מקסימום או מינימום מקומי נאמר כי a נקודת קיצון מקומי.

אם $a\in\Omega$ max או min מקומי ממש נאמר כי היא נקודת קיצון ממש.

דוגמאות

1)

$$n=2$$
$$f(x,y)=x^2+y^2$$

$a=(0,0)$ נקודת min ממש.

2)

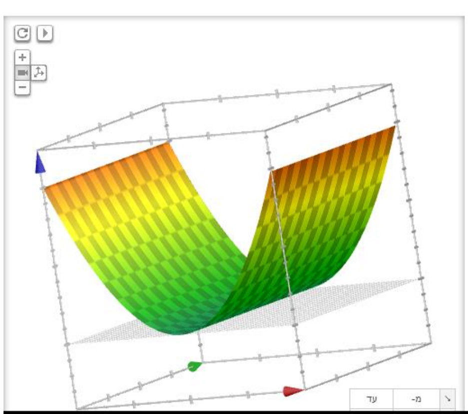
$$f(x,y)=-x^2-y^2$$

$a=(0,0)$ נקודת max ממש

3)

$$f(x,y)=x^2$$

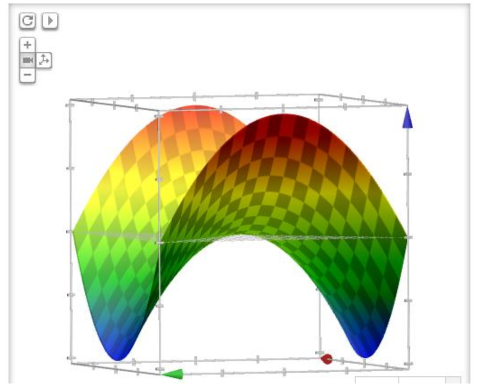
$a=(0,0)$ min לא ממש. $f(x,y)\geq f(0,0)$



2

4) $f(x,y)=x^2-y^2$

$$f(x,0)>f(0,0)$$
$$f(0,y)<f(0,0)$$



לנקודה כזאת קוראים נקודת אוכף Saddle point

הגדרה

אם f דיפ' $f:U\to\mathbb{R}$ בנקודה a ומתקיים $\forall j:\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=0$ אז a נקרא נקודה קריטית $(\nabla f(a)=0)$

משפט (תנאי הכרחי לקיצון מקומי)

$f:\Omega\to\mathbb{R}$. $a\in\mathring{\Omega}$. אם a נקודת קיצון וf דיפ' בנקודה a אזי a נקודה $\nabla f(a)=0$.

הוכחה

a נקודת min (WLOG ב.ה.כ)

$$\exists\delta>0\ :\ B(a,\delta)\subset\Omega$$
$$\forall \mathrm{x}\in B(a,\delta): f(x)\geq f(a)$$

ניקח $j=1\ \ldots .n$ ונגדיר $\varphi(t)\coloneqq f(a+te_j)$

$$|t|<\delta: f(a)\leq f\left(a+te_j\right)=\varphi(t)$$

$t=0$ נק' מינימום ל$\varphi(x)$ ולכן לפי למה $Fermat$ $\varphi'(0)=0$

$$0=\frac{d}{dt}|_{t=0}f\left(a+te_j\right)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

משמעות גאומטרית

משוואה של מישור משיק לגרף

$$T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right):\ x_{n+1}-a_{n+1}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\left(x_j-a_j\right)$$
$$a_{n+1}=f(a)$$

אם a נקודת קיצון אז $T_{(a,f(a))}\left(\Gamma_f\right):\ x_{n+1}-a_{n+1}=0: x_{n+1}=a_{n+1}$

כלומר מישור מקביל לציר x_{n+1}.

דוגמא

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

תנאי מספיק לקיצון מקומי

דיפרנציאל שני

$$d^2f_a(h) \coloneqq \frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(a+th)$$

$$\frac{d}{dt} f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0} f(a+th) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_j h_i$$

$$f \in C^2(U) \quad : \quad d^2f_a(h) = \sum_{i,j=1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}(a)h_i h_j$$

תבניות ריבועיות Quadratic Forms

הגדרה (תבנית ריבועית)

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, h_i h_j$$

$a_{ij} = a_{ji}$ כי ניתן לסדר אותם באופן הבא:

$$Q(h) = \cdots a_{ij}h_ih_j + \cdots + a_{ji}h_jh_i + \cdots$$
$$a_{ij}h_ih_j + a_{ji}h_jh_i = \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_ih_j + \left(\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}\right)h_jh_i$$

אזי $Q(h) = \langle Ah, h\rangle$

הגדרה

אומרים כי תבנית ריבועית Q חיובית אם $\forall h \in \mathbb{R}^n : Q(h) \geq 0$. נסמן $Q \geq 0$

דוגמא

$$Q(h) = h_1^2 + \cdots + h_n^2 \quad A = I \quad Q(h) \geq 0$$

מסקנה

תהי $Q(h)$, המטריצה A של התבנית מקיימת $A^T = A$

הגדרה

Q חיובית ממש אם $\forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\} : Q(h) > 0$. נסמן $Q > 0$

דוגמא

$$Q(h_1,h_2) = h_1^2 \quad Q \geq 0 \;\; Q \ngtr 0$$

הגדרה

התבנית Q נקראת לא שומרת סימן (לא מוגדרת Indefinite) אם $Q \nless 0 \wedge Q \ngtr 0$ כלומר $\exists h_+ . h_-$ כך ש

$$Q(h_+) > 0, Q(h_-) < 0$$

דוגמא

$$n = 2$$

$$Q(h_1, h_2) = h_1^2 - h_2^2$$
$$Q(1,0) > 0 \quad Q(0,1) < 0$$