תזכורת:

כפל עמודה־עמודה: $C_i\left(AB\right)=AC_i\left(B\right)$. כמו כן, אם:

$$A=\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1, & \ldots, & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

אז:

$$Ax=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$$

כלומר, כשמכפילים את A בעמודה מקבלים צירוף ליניארי של עמודות A.

אם כן, כשנסמן את איברי העמודה $C_i\left(B\right)$ מפורשות:

$$C_i\left(B\right)=\begin{pmatrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

נקבל ש: $C_i\left(AB\right)==AC_i\left(B\right)$ היא צירוף ליניארי של עמודות A.

מרחבי מטריצה:

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצה. המטריצה A מגדירה שלושה מרחבים וקטוריים בסיסיים, שנקראים מרחבי המטריצה.

1. מרחב השורות, $R\left(A\right)$ – המרחב הנפרש ע"י שורות A:

$$R\left(A\right)=sp\left\{R_1\left(A\right),\ldots R_m\left(A\right)\right\}\leq\mathbb{F}^n$$

2. מרחב העמודות, $C\left(A\right)$ – המרחב הנפרש ע"י עמודות A:

$$C\left(A\right)=sp\left\{C_1\left(A\right),\ldots,C_n\left(A\right)\right\}\leq\mathbb{F}^m$$

3. מרחב האפס, $N\left(A\right)$ – אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית, שמטריצת המקדמים שלה היא A:

$$N\left(A\right)=\left\{v\in\mathbb{F}^n|Av=0\right\}\leq\mathbb{F}^n$$

לפי מה שהסברנו בתזכורת, כל עמודה של AB היא צירוף ליניארי של עמודות A, כלומר:

$$\{C_i(AB), \ldots, C_n(AB)\} \subseteq sp\{C_i(A), \ldots, C_k(A)\}$$

לכן:

$$sp\{C_i(AB), \ldots C_n(AB)\} \subseteq sp\{C_i(A), \ldots, C_k(A)\}$$

כלומר: $C(AB) \subseteq C(A)$. את הטענה על שורות אפשר להוכיח באופן דומה, עם כפל שורה־שורה.

<u>טענה:</u>
למערכת $Ax = b$ יש פתרון אם ורק אם $b \in C(A)$.
<u>הסבר:</u>
מצד אחד, אם למערכת יש פתרון, קיים x_1 כך ש: $Ax_1 = b$; לפי מה שהסברנו, Ax_1 הוא צירוף ליניארי של עמודות A, כלומר שייך ל־$C(A)$, ולכן: $b \in C(A)$.
מצד שני, אם $b \in C(A)$, אז קיימים סקלרים $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש: $b = \alpha_1 C_1(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A)$. לפי כפל עמודה־עמודה:

$$A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A) = b$$

כלומר, הוקטור $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת: $Ax = b$, ולמערכת אכן יש פתרון.

<u>משפט:</u>
<u>$\dim R(A) = \dim C(A)$</u>, לכל A.

הוכחה בסיכום. כל עמודה של A היא צירוף ליניארי של עמודות B, $\{v_1,\dots,v_k\}$, אז קיימים סקלרים $\alpha_{1i},\dots,\alpha_{ki}$ כך ש: $C_i(A)=\alpha_{1i}v_1+\dots+\alpha_{ki}v_k$.

מכיוון שהמימדים האלו שווים, אנחנו יכולים להגדיר לכל מטריצה את **הדרגה** שלה, באופן הבא:

$$rank(A)=r(A)=\dim R(A)=\dim C(A)$$

<u>טענה:</u>

לכל A,B: $rank(AB)\le rank(A),rank(B)$.

<u>הסבר:</u>

אנחנו יודעים ש: $C(AB)\subseteq C(A)$, ולכן: $\dim C(AB)\le\dim C(A)$, כלומר: $rank(AB)\le rank(A)$. כמו כן:

$$rank(AB)=rank\left((AB)^t\right)=rank\left(B^tA^t\right)\le rank\left(B^t\right)=rank(B)$$

נשים לב שפעולת השחלוף לא משנה את הדרגה.

אם מטריצה P היא מטריצה הפיכה, אז: $rank(PA)=rank(A)$. כלומר, כפל במטריצה לא יכול להגדיל את הדרגה, רק להקטין; אם כופלים במטריצה הפיכה, הדרגה לא משתנה.

ההיפך לא נכון – אם כפל במטריצה לא שינה את הדרגה, זה לא אומר שהיא הפיכה. למשל: $A=B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, הדרגה של A היא 1, וגם:

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

הדרגה של AB היא 1; הדרגה של B לא השתנתה, אבל לא כפלנו במטריצה הפיכה.

<u>משפט:</u>

פעולות שורה לא משנות את מרחב השורות. לכן, אם מטריצות הן שקולות שורה יש להן את אותו מרחב שורות, ובפרט: $R(A)=R(CF(A))$.

הסבר:

פעולות שורה - לחבר שורות ולהכפיל בסקלר, אחרי שביצענו פעולות שורה קיבלנו צירופים ליניאריים של השורות המקוריות, ולכן אם מ-A הגענו ל-B ע"י פעולות שורה, $R(B) \subseteq R(A)$. אבל, אפשר גם ללכת "הפוך" - מ-B להגיע ל-A ולכן $R(A) \subseteq R(B)$. סה"כ, $R(A) = R(B)$.

אם כן, כשנרצה למצוא בסיס למרחב השורות, פשוט נדרג את המטריצה וניקח את השורות שלא מתאפסות (הרי השורות הן כבר פורשות, ורק צריך "לסנן" אותן לבת"ל).

מכאן, אם $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, אז מספר השורות שלא מתאפסות אחרי דירוג הוא הדרגה של A, ולכן מספר השורות שיתאפסו בדירוג הוא:

$$m - rank\left(A\right)$$

איך נמצא בסיס למרחב העמודות של A? אפשר פשוט למצוא בסיס למרחב השורות של A^t...

דרך אחרת - מספר השורות שלא מתאפס אחרי דירוג שווה למספר המשתנים התלויים (=מספר השורות שיש בהן איבר מוביל). מספר השורות שלא מתאפס הוא הדרגה של A, ושווה גם למימד של מרחב העמודות. לכן, כדי למצוא בסיס למרחב העמודות, אפשר לדרג את המטריצה, ולקחת את העמודות שבהן יש משתנה תלוי - העמודות המקוריות. כלומר, אם בעמודה בצורה המדורגת יש משתנה תלוי, העמודה המתאימה במטריצה המקורית לפני הדירוג תהיה שייכת לבסיס של מרחב העמודות.

כך, נוכל לדרג את המטריצה A פעם אחת ולמצוא בסיסים גם למרחב השורות וגם למרחב העמודות - השורות שלא התאפסו במטריצה המדורגת הן בסיס למרחב השורות, העמודות שיש להן משתנה תלוי במטריצה המקורית הן בסיס למרחב העמודות.

כעת, נראה איך אפשר להשתמש במרחבי המטריצה כדי לטעון טענות על המטריצה, ובראשן - מתי המטריצה הפיכה?

משפט:

תהי A מטריצה ריבועית מסדר n. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה - קיימת מטריצה B כך ש: $AB = BA = I$.
2. $CF(A) = I$.

3. בצורה מדורגת אין שורת אפסים.
4. בצורה מדורגת אין עמודת אפסים.
5. קיימת B כך ש: $AB = I$.
6. קיימת B כך ש: $BA = I$.
7. $rank\left(A\right) = n$.
8. השורות של A בת"ל.
9. העמודות של A בת"ל.
10. השורות של A פורשות את $\mathbb{F}^n$.
11. העמודות של A פורשות את $\mathbb{F}^n$.
12. השורות של A בסיס של $\mathbb{F}^n$.
13. העמודות של A בסיס של $\mathbb{F}^n$.
14. $N\left(A\right) = \{0\}$.
15. $\dim N\left(A\right) = 0$.
16. לכל b, למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.
17. קיים וקטור b כך שלמערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.

<u>הוכחה:</u>
לא נרשום את הכל, כמובן; רק את החשובים.
אם כן, A הפיכה אם ורק אם $CF\left(A\right) = I$ אם ורק אם בצורה המדורגת אין שורת אפסים אם ורק אם בצורה המדורגת יש n שורות שלא מתאפסות (השורות שלא מתאפסות בצורה המדורגת הן בסיס למרחב השורות, והדרגה היא המימד של מרחב השורות; אם בבסיס של מרחב השורות יש n שורות, אז $rank\left(A\right) = n$) אם ורק אם $rankA = n$.
כעת, $rankA = n$ אם ורק אם בבסיס של מרחב השורות יש n שורות (במטריצה כולה יש n שורות) אם ורק אם השורות של A מהוות בסיס למרחב השורות ולכן השורות הן בת"ל. מצד שני, אם שורות A הן בת"ל, השורות פורשות את מרחב השורות (לפי ההגדרה של מרחב השורות) ולכן הן בסיס; יש n שורות ולכן: $rankA = \dim R\left(A\right) = n$.
באופן דומה, אפשר להראות את אותו הדבר על העמודות, ועל פורשות/בסיס במקום בת"ל, עם השלישי חינם.
כעת, נראה ש: $rankA = n$ אם ורק אם $\dim N\left(A\right) = 0$. כפי שראינו,

$rankA$ הוא מספר השורות שלא מתאפסות בצורה המדורגת של A, כלומר מספר העמודות שיש בהן משתנה תלוי (ולא חופשי). מצד שני, $N\left(A\right)=\left\{v\in\mathbb{F}^{n}|Av=0\right\}$, ולכן $\dim N\left(A\right)$ הוא מספר המשתנים החופשיים. בסה"כ, מספר המשתנים החופשיים ועוד מספר המשתנים התלויים שווה למספר כל העמודות, ולכן:

$$\dim N\left(A\right)+\dim R\left(A\right)=n$$

נשים לב שזה עובד "תמיד", גם אם A לא הפיכה, ואפילו לא ריבועית...
(דרך אחרת - אם A הפיכה, אז: $Av=0\iff A^{-1}Av=A^{-1}0\iff v=0$ ואז: $N\left(A\right)=\left\{0\right\}$ ולכן גם: $\dim N\left(A\right)=0$)
לבסוף, אם קיים b עבורו למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד, כנדרג את A קנונית נקבל את I (כי אין משתנה חופשי), ולכן A הפיכה. מצד שני, אם A הפיכה, לכל b יש פתרון יחיד למערכת $Ax=b$, והוא: $x=A^{-1}b$, ובוודאי שקיים b שעבורו יש פתרון.

העתקות ליניאריות:
כדי להגדיר העתקה ליניארית, אנחנו צריכים להגדיר את המושג של פונקציה (העתקה ליניארית היא סוג מסוים של פונקציה, בין מרחבים וקטוריים). בעקרון, מגדירים את מושג הפונקציה "כמו שצריך" בבדידה; נתמקד רק במה שחשוב לנו.

יחס $f\subseteq A\times B$ נקרא פונקציה, אם הוא מקיים את התכונה הבאה: לכל $a\in A$ קיים $b\in B$ יחיד, כך ש: $(a,b)\in f$; כלומר, לכל איבר בקבוצה השמאלית יש איבר אחד בדיוק בקבוצה הימנית שנמצא איתו ביחד בזוג.
למשל: $A=\left\{1,2,3\right\},B=\left\{1,2,3,4\right\}$. נתבונן ביחסים:

$$f_{1}=\left\{\left(1,1\right),\left(1,2\right),\left(2,2\right),\left(3,4\right)\right\}$$

$$f_{2}=\left\{\left(1,1\right),\left(2,1\right),\left(3,4\right)\right\}$$

$$f_{3}=\left\{\left(1,1\right),\left(3,3\right)\right\}$$

$$f_4 = \{(1,1), (2,4), (3,3)\}$$

f_1 לא פונקציה, כי ל־$A \ni 1$ יש יותר מ־b יחיד שמתאים לו, גם $B \ni 1$ מקיים: $(1,1) \in f_1$ וגם $2 \in B$ מקיים: $(1,2) \in f_1$.

f_2 פונקציה. f_3 לא פונקציה, כי ל־$A \ni 2$ אין איבר מתאים מ־B. f_4 פונקציה.

לפונקציות יש סימונים ומינוחים מיוחדים. אם $f \subseteq A \times B$ היא פונקציה, נסמן $f : A \to B$. נאמר ש־A היא התחום של f ו־B היא הטווח של f, ונסמן:

$$A = Dom(f), B = Ran(f)$$

כמו כן, אם $(a,b) \in f$, נסמן: $f(a) = b$, ונאמר ש־a הוא המקור של b ו־b הוא התמונה של a.

בבית הספר ראינו פונקציות ממשיות (מ־$\mathbb{R}$ ל־$\mathbb{R}$), עם תחום הגדרה מעט קטן יותר מ־$\mathbb{R}$. למשל:

א. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

ב. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

ג. $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

כעת, יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \to W$ נקראת העתקה ליניארית, אם היא מקיימת את התכונה הבאה: לכל $v_1, v_2 \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים:

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$

<u>דוגמאות:</u>

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y,z) = (x+y+z, 0)$. כדי להראות ש־T העתקה ליניארית, נבדוק שהתכונה מתקיימת - יהיו $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$, וצ"ל: $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$.

נסמן: $v_1 = (x_1, y_1, z_1), v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, ואז:

$$T(\alpha v_1 + v_2) = T(\alpha(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) = T(\alpha x_1 + x_2, \alpha y_1 + y_2, \alpha z_1 + z_2)$$

$$= (\alpha x_1 + x_2 + \alpha y_1 + y_2 + \alpha z_1 + z_2, 0) = \alpha (x_1 + y_1 + z_1, 0) + (x_2 + y_2 + z_2, 0)$$

$$= \alpha T (x_1, y_1, z_1) + T (x_2, y_2, z_2) = \alpha T (v_1) + T (v_2)$$

וזו אכן העתקה ליניארית.

2. $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = x^2$. זו לא העתקה ליניארית, למשל: $v_1 = 2, v_2 = 3, \alpha = 4$. מצד אחד:

$$T(\alpha v_1 + v_2) = T(4 \cdot 2 + 3) = T(11) = 121$$

מצד שני:

$$\alpha T(v_1) + T(v_2) = 4 \cdot T(2) + T(3) = 4 \cdot 2^2 + 3^2 = 25$$

וקיבלנו:

$$T(\alpha v_1 + v_2) \neq \alpha T(v_1) + T(v_2)$$

3. $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_3[x]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^3 + (b+a)x + d$. נוכיח ש־$T$ העתקה ליניארית; יהיו $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ו־$\alpha \in \mathbb{R}$, צ"ל: $T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$. אם כן, נסמן: $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ ונקבל:

$$T(\alpha v_1 + v_2) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a_1 + a_2 & \alpha b_1 + b_2 \\ \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha a_1 + a_2) x^3 + (\alpha b_1 + b_2 + \alpha a_1 + a_2) x + \alpha d_1 + d_2 =$$

$$= \alpha \left(a_1 x^3 + (b_1 + a_1) x + d_1\right) + a_2 x^3 + (b_2 + a_2) x + d_2 =$$

$$\alpha T\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$

כנדרש, ו־T אכן העתקה ליניארית.

4. דוגמה חשובה: תהי $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, הפונקציה $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ומוגדרת ע"י: $T(v) = Av$ היא העתקה ליניארית. אכן:

$$T(\alpha v_1 + v_2) = A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + A v_2 = \alpha T(v_1) + T(v_2)$$

בהמשך, נראה שתכלס גם ההיפך נכון - לכל העתקה ליניארית T יש מטריצה A שמגדירה אותה.

למשל, ההעתקה $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 0)$ מוגדרת באמצעות:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

להכפיל ב־A זה כמו להפעיל את ההעתקה T...

אינטואיטיבית, אם מחברים את המשתנים ומכפילים אותם בסקלר, זו העתקה ליניארית; אם מחברים את המשתנים עם קבוע, מעלים בריבוע וכן הלאה זו כנראה לא העתקה ליניארית.

5. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $T(p(x)) = p'(x) + 1$, כלומר: $T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b + 1$. זו לא העתקה ליניארית, למשל: $p_1(x) = 1, p_2(x) = x$, $\alpha = 1$ ואז:

$$T(\alpha p_1(x) + p_2(x)) = T(x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\alpha T(p_1(x)) + T(p_2(x)) = T(x) + T(1) = 1 + 1 + 0 + 1 = 3$$

והם שונים. לכן, T לא העתקה ליניארית.

6. $T : \mathbb{F}_n[x] \to \mathbb{F}_n[x]$, $T(p) = p'$ היא כן העתקה ליניארית.

7. $T:\mathbb{F}^{m\times n}\to\mathbb{F}^{n\times m}$, $T\left(A\right)=A^{t}$ העתקה ליניארית.
8. $T:\mathbb{F}^{n\times n}\to\mathbb{F}$, $T\left(A\right)=tr\left(A\right)$ העתקה ליניארית.

תכונה חשובה של העתקה ליניארית: אם $T:V\to W$ העתקה ליניארית, אז: $T\left(0_{v}\right)=0_{w}$.