הרצאה 4

06.03.2016

נכתב על ידי נועם יערי

בעיות

בעיה יחסית קלה שלא פתרנו:

מסדרים 30 אנשים סביב כמה שולחנות עגולים שיש בהם $6 + 6 + 8 + 10$ מקומות. כמה דרכים יש להושיב את האנשים? כנ"ל – סביב k_i שולחנות בגודל n_i, $\sum k_i n_i =$ מספר האנשים.

בעיה די קשה שלא פתרנו:

מטיילים על $\mathbb{Z}^2$. מתחילים ב - $(0,0)$. רוצים להגיע ל - $(z_n, 0)$; כל צעד הוא $(+1,+1)$ או $(+1,-1)$.

א) כמה מסלולים יש?

ב) כמה מסלולים יש שלא יורדים מתחת לציר ה – x?

בעיה שאין לה נוסחה מפורשת:

כמה דרכים יש לחלק n כדורים זהים לקבוצות לא ריקות? סימון: $p(n)$

5,4+1,3+2,3+1+1,2+2+1,2+1+1+1,1+1+1+1+1 כלומר $p(5) = 7$.

תרגיל: כמה זה $p(100)$? $p(n) \sim e^{\sqrt{\frac{2\pi n}{3}}}$.

בעיית ספירת הקולות

מתקיימות בחירות בין שני מועמדים. נניח שבסופו של דבר התוצאה היא $a:b$.

מה הסיכוי שבמשך ספירת הקולות הצד המנצח הוביל כל הזמן?

פתרון: נתרגם את ליל ספירת הקולות להילוך על $\mathbb{Z}^2$. מתחילים בראשית. עם כל קול, מתקדמים צעד ימינה: למעלה אם הוא לטובת המנצח, למטה אם הוא לטובת המפסיד.

הטיול מתחיל ב – $(0,0)$ ונגמר ב – $(a+b, a-b)$. השאלה היא מה הסיכוי שההילוך לעולם לא נוגע בציר ה – x.

$X =:$ קבוצת כל ההילוכים מהראשית ל – $(a+b, a-b)$.

$A =:$ הילוכים המתחילים בקול לטובת המנצח.

$B =:$ הילוכים המתחילים בקול לטובת המפסיד.

$X' =:$ מסלולים שהם תמיד מעל לציר x.

$X'' =:$ מסלולים שנוגעים לפעמים בציר ה – x.

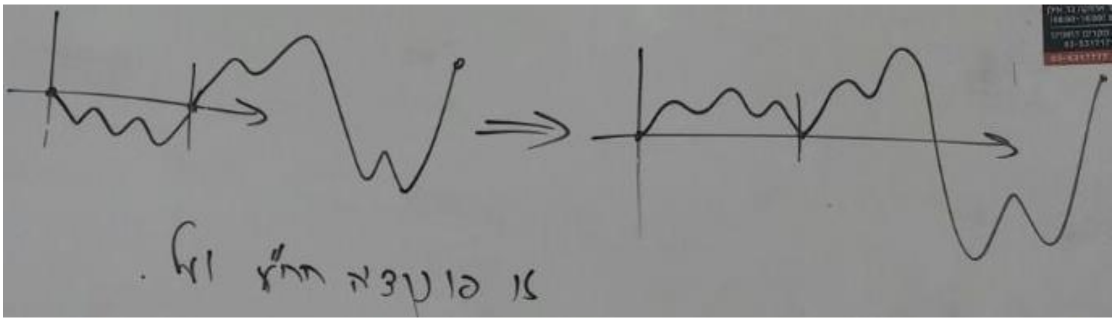
השאלה – $\frac{|X'|}{|X|} = ?$

$$X = X' \cup X''$$

$$A = \underbrace{A'}_{=A\cap X'} \cup \underbrace{A''}_{=A\cap X''}$$

$$B = \underbrace{B'}_{=B\cap X'} \cup \underbrace{B''}_{=B\cap X''}$$

נגדיר פונקציה $B'' \to A''$ לפי :



לכן $|B''| = |A''|$.

$$\frac{|X'|}{|X|} = \frac{|A'|}{|X|}$$

לפי הגדרת הקבוצות, $\frac{|A'|}{|X|} = \frac{|A|}{|X|} - \frac{|A''|}{|X|}, \frac{|B''|}{|X|} = \frac{|B|}{|X|} = \frac{b}{a+b} \Leftarrow \frac{|A|}{|X|} = \frac{a}{a+b}, \frac{|B|}{|X|} = \frac{b}{a+b}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{|X'|}{|X|} = \frac{|A'|}{|X|} = \frac{|A - A''|}{|X|} =^{*} \left(\frac{|A|}{|X|} - \frac{|B''|}{|X|}\right) = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

תורת ההסתברות

מרחבי הסתברות בדידים

הגדרה

מרחב הסתברות בדיד הוא זוג סדור (Ω, P) כאשר Ω קבוצה סופית או בת מניה ו – $P: \Omega \to \mathbb{R}$ פונקציה המקיימת:

$$\forall x: P(x) \geq 0$$
$$\sum_{x\in\Omega} P(x) = 1$$

$\sum_{x\in\Omega} P(x)$ טור מתכנס שכל איבריו אי שליליים לכן הטור מתכנס בהחלט. לפי חשבון אינפי, סדר הסכימה לא משנה את התוצאה.

דוגמה

$$\Omega = \{1, \cdots, 6\}, P(x) = \frac{1}{6}$$

אפשר להרחיב גם ל - : $\Omega = \{1, \cdots, 8\}, P(1, \cdots, 6) = \frac{1}{6}, P(7,8) = 0$.

הערה

בינתיים, מותר להניח $P(x) > 0$ לכל $x \in \Omega$. זורקים מטבע הוגן עד להופעה הראשונה של "1".
נגדיר מרחב הסתברות $\Omega = \{1,2,3,4, \cdots, \infty\}$.

$$P(1) = \frac{1}{2}$$
$$P(2) = \frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$P(n) = 2^{-n}$$
$$P(\infty) = 0$$

שימו לב

x מחוץ ל – Ω ($P(x)$ לא מוגדר) $\boxed{\neq}$ x לא יכול לקרות $\boxed{\neq}$ $P(x) = 0$

הגדרה – מאורע

(Ω, P) מרחב הסתברות. כל תת קבוצה $A \subseteq \Omega$ נקראת "מאורע". מרחיבים את $P: \Omega \to \mathbb{R}$ לפונקציה $P: \mathbb{P}(\Omega)_{\text{קבוצת החזקה}} \to \mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא:

$$P(A) = \sum_{x\in A} P(x)$$

תכונות

1. $P(\Omega) = 1$ (נובע ישירות מהאקסיומה הקודמת).
2. אם $A \cap B = \phi$ אז $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
3. גרסה חזקה: אם $A_1, \cdots \subseteq \Omega$ זרות בזוגות, $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \leq 1$