תרגיל מס' 1 – מבוא לפונקצית דלתא Dirac Delta Function

שאלה 1:

הוכח את הקשרים הבאים עבור פונקצית דלתא:

א. $\delta(x)=\delta(-x)$

ב. $f(x)\delta(x-a)=f(a)\delta(x-a)$

ג. $\delta(xa)=|a|^{-1}\delta(x)$ **כאשר** $a\neq 0$ **(שימו לב לבדוק עבור** a חיובי ושלילי!)

ד. $\delta'(-x)=-\delta'(x)$

ה. $\delta((x-a)(x-b))=\frac{1}{|a-b|}\left[\delta(x-a)+\delta(x-b)\right]$

שאלה 2:

הראה כי ניתן לייצג את פונקצית דלתא ע"י:

א. $$\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\gamma^2}\right)$$

ב. $\gamma\to 0$ $$\delta(x)=\begin{cases}\frac{1}{\gamma} & -\frac{\gamma}{2}<x<\frac{\gamma}{2}\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

שאלה 3:

נגדיר $\delta_{n,m}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$.

פונקציה זאת נקראת "פונקצית דלתא של קרונקר" (Kronecker delta func.).

בשאלה זו נראה את הקשר בין הפונקציה הנ"ל עבור משתנים דיסקרטיים n, , לפונקציית דלתא של

דיראק עבור משתנה רציף x.

א. הראה כי עבור n-ים שלמים מתקיים כי: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi}d\varphi = \delta_{n,0}$.

ב. ע"מ לעבור ממשתנה בדיד n למשתנה רציף x יש לבצע את הטרנספורמציה הבאה: $x = \frac{2\pi n}{L}$

כאשר דורשים ש $L \to \infty$. **השתמש בטרנספומציה הנ"ל וב** $\delta(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\delta_{n,0}}{\Delta x}$ והוכח שמתקיים:

$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$.

<u>שאלה 4:</u>

חשב את האינטגרל הכפול הבא: $I = \int_0^3 dy \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[e^{ik(y^2 + y - 2)} \sin^2(y) \right]$

<u>שאלה 5:</u>

חשב את האינטגרל הכפול הבא: $I = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[e^{ik(x^2 - 4)} \ln(|x|) \right]$