פתרון תרגיל 8

1 א') נתונה המשוואה $x^5-4x+1=0$ בקטע $[0,1]$ מצאו את מספר הפתרונות בקטע הנ"ל.
פתרון:
דרך א' : נתבונן $f(x)=x^5-4x+1$ זו פונקציה רציפה וגזירה בקטע בכל- $\mathbb{R}$, בקטע $[0,1]$ היא מקיימת את תנאי משפט ערך הביניים שכן $f(0)=1>0$ ו- $f(1)=-2<0$ לכן יש לפחות שורש/אפס בקטע הזה.
כעת נשתמש במשפט רול על כל $\mathbb{R}$, מתקיים $f'(x)=5x^4-4$, אם נשווה את הנגזרת לאפס נקבל $5x^4-4=0$ ולכן $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{0.8}\approx\pm0.9457$, הנגזרת מתאפסת רק פעמיים כלומר, ל- $f(x)$ לכל היותר שלושה שורשים בכל- $\mathbb{R}$. אחד השורשים (לפחות) נמצא בקטע $[0,1]$. ננסה למצוא שני קטעים נוספים שמקיימים את תנאי משפט ערך הביניים. נתבונן, למשל בקטע $[-2,-1]$. כאן מתקיים $f(-1)>0$ וגם $f(-2)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים יש לפחות שורש אחד בקטע זה. כעת נתבונן בקטע $[1.25,2]$ גם כאן מתקיים $f(2)>0$ וכן $f(1.25)<0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים , יש כאן לפחות שורש אחד. לסיכום בכל מהקטעים $[1.25,2]$,$[0,1]$, $[-2,-1]$ יש לפחות שורש אחד, אבל יש לכל היותר שלושה שורשים בסה"כ, ולכן בכל אחד מהקטעים יש בדיוק שורש אחד, (שימו לב שהקטעים זרים ולכן בהכרח בכל קטע יש שורש ממשי אחר), לכן לסיכום בקטע $[0,1]$ יש ל-$f(x)$ בדיוק שורש אחד.

דרך ב': נראה כי בקטע $[0,1]$ ל- $f(x)$ יש רק שורש אחד. בקטע $[0,0.9457]$ הפונקציה $f(x)$ מקבלת סימנים מנוגדים ($f(0.9457)=-2.0026$ ו- $f(0)=1$) לכן לפי משפט ערך הביניים קיימת נקודה c כך ש- $c\in[0,0.9457]$, ומתקיים ש- $f(c)=0$, כמו כן $f'(x)=5x^4-4$, שלילית בכל הקטע $[0,0.9457]$ ולכן הפונקציה $f(x)$ מונוטונית יורדת בקטע הנ"ל ולכן $f(x)$ חח"ע בקטע $[0,0.9457]$ ומקבלת סימנים מנוגדים בקצוות ולכן היא חותכת בדיוק בנקודה אחת את ציר ה x. כמו כן $f'(x)=5x^4-4$ חיובית בכל הקטע $[0.9457,1]$ ולכן הפונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה בקטע $[0.9457,1]$ אך הערך המקסימלי של $f(x)$ בקטע $[0.9457,1]$ מתקבל בנקודה $x=1$ שם $f(1)=-2$ לכן $f(x)$ לא תחתוך את ציר ה- x בקטע $[0.9457,1]$ לכן בקטע $[0,1]$ יש לפונקציה $f(x)$ רק שורש אחד.

1 ב') נתונה הפונקציה $2^x-5x=0$ בקטע $[0,1]$ מצא את מספר הפתרונות של המשוואה.
פתרון: נסמן $f(x)=2^x-5x$, אזי $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ כיוון שהיא הפרש של שתי פונקציות רציפות ועל כן רציפה, כמו כן $f(0)=1$ ו- $f(1)=-3$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיימת לפחות נקודה אחת, כך ש- $c\in[0,1]$ ומתקיים ש- $f(c)=0$, נראה כי ישנו רק שורש אחד למשוואה בקטע הנ"ל, נניח בשלילה כי קיים עוד שורש למשוואה שנסמנו ב- d כך ש- $d\in[0,1]$ ו-$f(d)=0$, $f(x)$ גזירה בקטע $(0,1)$ כיוון שהיא הפרש של שתי פונקציות גזירות ועל כן גזירה, לכן לפי משפט רול נובע כי קיימת נקודה h, כך ש- $h\in[0,1]$, בה $f'(h)=0$, כעת נחשב את הנגזרת של $f(x)$, $f'(x)=2^x ln(2)-5$, אם נציב בנגזרת את הנקודה $x=h$ נקבל $f'(h)=2^h ln(2)-5=0 \Leftarrow 2^h=\frac{5}{ln(2)} \Leftarrow 2.8507 \approx log_2\left(\frac{5}{ln(2)}\right)=h$, בסתירה לכך ש- $h\in[0,1]$ ולכן בקטע $[0,1]$ ישנו רק שורש אחד לפונקציה $f(x)$.

2) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[0,a]$ כך ש $f(0)=f(a)$ הוכיחו כי שקיים $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש- $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

פתרון: נעזר ברמז, נתבונן בפונקציה $g(x) = f\left(x+\frac{a}{2}\right) - f(x)$, $f(x)$ רציפה בקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כמו כן $f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ רציפה ב- $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כהרכבה של רציפות ($x+\frac{a}{2}$ רציפה בקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ ו $f(x)$ רציפה בקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$) לכן סה"כ $g(x)$ רציפה ב- $\left[0,\frac{a}{2}\right]$כהפרש של רציפות. בשל הנתון ש $f(0)=f(a)$ מתקיים : $g(0)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(0)$ ו- $g\left(\frac{a}{2}\right)=f(a)-f\left(\frac{a}{2}\right)=f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)$. נשים לב ש- $g(0)=-g\left(\frac{a}{2}\right)$. אם $g(0)=-g\left(\frac{a}{2}\right)=0$ סיימנו שכן עבור $x_0=0$ נקבל את הדרוש. אחרת, בהכרח 0 בין $g(0)$ ל- $g\left(\frac{a}{2}\right)$ (כי הם שוני סימן) וממשפט ערך הביניים ביחס ל- $g(x)$ ולקטע $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ נקבל שקיימת נקודה $x_0\in\left[0,\frac{a}{2}\right]$ כך ש- $g(x_0)=0$. מכאן נסיק ש- $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$.

3) תהי הפונקציה $f(x)=ln^2(x)-5ln(x)+6$ הוכיחו כי קיימת נקודה $e^2<c<e^3$ כך ש- $f'(c)=0$.
פתרון: $f(x)$ גזירה בקטע (e^2,e^3) כיוון שהיא מורכבת מהפרש של פונקציות גזירות ועל כן גזירה, כמו כן $f(x)$ רציפה בקטע $[e^2,e^3]$ כיוון שהיא מורכבת מהפרש של פונקציות רציפות, ומתקיים: $f(e^2)=f(e^3)=0$ נקבל מיידית ממשפט רול שקיימת נקודה $e^2<c<e^3$ כך ש- $f'(c)=0$.

4) הוכיחו שלכל $0<y<x$ ו- $\alpha>1$ מתקיים: $\alpha y^{\alpha-1}(x-y)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}(x-y)$.
פתרון: יהיו $0<y<x$ ו- $\alpha>1$. הפונקציה $f(x)=x^\alpha$ גזירה ב $\mathbb{R}$ ולכן בפרט גזירה ב (x,y) ורציפה בקטע $[x,y]$. ממשפט הערך הממוצע של לגרנז' נקבל שקיימת נקודה $c\in(x,y)$ כך ש- $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=f'(c)$. לכן,
$\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}=\alpha c^{\alpha-1}$, מכיוון ש- $0<y<c<x$ ו- $\alpha>1$
נקבל ש $\alpha y^{\alpha-1}<\alpha c^{\alpha-1}<\alpha x^{\alpha-1}$ ולכן $\alpha y^{\alpha-1}<\frac{x^\alpha-y^\alpha}{x-y}<\alpha x^{\alpha-1}$, לאחר הכפלת אי השיוויונים ב- $x-y$ נקבל ש: $\alpha y^{\alpha-1}(x-y)<x^\alpha-y^\alpha<\alpha x^{\alpha-1}(x-y)$, כדרוש.

5) חשבו את הגבולות הבאים במובן הרחב, במידה והגבול לא קיים הסבירו מדוע.

- א) $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=\infty$, אכן, יהי $0<\epsilon\approx0$ אזי $\frac{1}{\sqrt[5]{\epsilon}}$אינסופי חיובי.
- ב) $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=-\infty$, אכן , יהי $0>\epsilon\approx0$ אזי $\frac{1}{\sqrt[5]{\epsilon}}$ אינסופי שלילי.
- ג) $\lim_{x\to\infty}e^{2x}sin(x)$ הגבול לא קיים נראה זאת: נבחר $H=2\pi N+\frac{\pi}{2}$ כאשר N הוא היפר שלם אינסופי חיובי ונקבל $e^Hsin(H)=e^H\cdot1=e^H$ לעומת זאת עבור $H=2\pi N-\frac{\pi}{2}$ נקבל: $e^Hsin(H)=e^H\cdot-1=-e^H$ אינסופי שלילי.
- ד) $\lim_{x\to0}\left(sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ הגבול לא קיים, נראה זאת נבחר $\epsilon=\frac{1}{2\pi N}$ כאשר N הוא היפר שלם אינסופי חיובי נקבל ש- $sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)=sin(2\pi N)=0$ מצד שני אם נקח $\epsilon=\frac{1}{2\pi N+\frac{\pi}{2}}$ אשר N הוא היפר שלם אינסופי חיובי נקבל ש- $sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)=sin\left(2\pi N+\frac{\pi}{2}\right)=sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
- ה) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$, ראשית $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^3}=\frac{1-x}{x^4}$, כעת לכל $0\neq\epsilon\approx0$ מתקיים ש $1-\epsilon$ הוא סופי שאינו אינפינטיסמל חיובי וכמו כן ϵ^4 הוא אינפיניטסמל חיובי ולכן $\frac{1-\epsilon}{\epsilon^4}$ הוא אינסופי חיובי.
- ו) $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=0$ אכן יהי $x=H$ אֵינסופי חיובי $\sqrt{H-1}$ הוא אינסופי חיובי לכן $\frac{1}{\sqrt{H-1}}\approx0$
- ז) $\lim_{x\to0}\left(x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$ אכן, $-1\leq sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$ עפ"י כלל העברה הכולל נקבל שלכל $0\neq\epsilon\approx0$, $-1\leq sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\leq1$ ולכן $sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ הוא סופי, מכאן $\epsilon sin\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\approx0$ כמכפלת סופי באינפינטסימל.

- ח) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sin(x)}\right)=0$ ראינו בתרגול 7 כי $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{sin(x)}\right)=1$

כמו כן לפי סעיף ז' $\lim\limits_{x\to 0}\left(x sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0$ ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)}{sin\left(x\right)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sin\left(x\right)}\cdot x sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sin\left(x\right)}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)=1\cdot 0=0$$

6) הוכיחו :

א) אם $\lim\limits_{x\to c}\left(f\left(x\right)\right)=0$ ו- $f\left(x\right)>0$ לכל x אז $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\infty$

ב) אם נוריד את הדרישה ש $f\left(x\right)>0$ לכל x האם עדיין הטענה תהיה נכונה? נמקו.

פתרון:

א) יהי $c\neq a\approx c$ וכן $f\left(x\right)>0$ לכל x ולכן $0\approx f\left(a\right)>0$, נובע מהגדרת הגבול ומהנתון ש $f\left(x\right)>0$ לכל x, מכאן $\frac{1}{f(a)}$ אינסופי חיובי וזה מוכיח ש $\lim\limits_{x\to c}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=\infty$.

ב) אם נוריד את הדרישה ש $f\left(x\right)>0$ לכל x הטענה כבר אינה נכונה ,

למשל: ניקח את הפונקציה $f\left(x\right)=x$ אז , $\lim\limits_{x\to 0}\left(f\left(x\right)\right)=0$

כמו כן $f\left(x\right)$ לא חיובית לכל x, (היא שלילית לכל $x<0$).

נקבל ש- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים, כיוון שאם ניקח $0<\epsilon\approx 0$, נקבל ש $\frac{1}{\epsilon}$ הוא אינסופי חיובי, ואם ניקח $0>\epsilon\approx 0$ נקבל ש $\frac{1}{\epsilon}$ הוא אינסופי שלילי ולכן הגבול לא קיים בנקודה $x=0$.