אינפי 3

תרגול 6

תזכורת: דיפרנציאלים מסדר גבוה

הגדרה:

תהי $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ פונקציה. הדיפרנציאל מסדר n של הפונקציה הוא:

$$d_a^n f(x_1,\dots,x_m)=\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_m=n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdot\ldots\cdot\alpha_m!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial^{\alpha_1}x_1\ldots\partial^{\alpha_m}x_m}(a)\cdot dx_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot dx_m^{\alpha_m}$$

<u>תרגיל:</u>

מצא דיפרנציאל מסדר שני של הפונקציה $u = x^2 y^3$

<u>פתרון</u>:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2 y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x^2 y$$

$$d^2 u = 2y^3 dx^2 + 2 \cdot 6xy^2 dxdy + 6x^2 y dy^2$$

טור טיילור:

תזכורת- טור טיילור במשתנה אחד:

$$T(x) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0)^3+\ldots$$

או בקצרה:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

טור טיילור:

עבור n משתנים, נגדיר:

תהי $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה. פולינום טיילור של הפונקציה הוא:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{\partial^{k_1} \dots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_n} x_n} f(a) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i} \cdot \frac{1}{k_1! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

נחזור למשתנה יחיד ונשים לב לדמיון:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

תרגיל:

מצאו את פולינום טיילור עד סדר 2 של $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ מסביב לנקודה $(1,0)$.

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרות מסדר 1:

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ומסדר 2:

$$f_{xx}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

בנקודה שלנו, נקבל:

$$f_x(1,0) = 1, f_y(1,0) = 0$$

$$f_{xx}(1,0) = 0, f_{xy}(1,0) = 0, f_{yy}(1,0) = 1$$

$$f(1,0) = 1$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$f(x,y) \approx 1 + (x-1) + \frac{1}{2}y^2$$

<u>תזכורת</u>:

פיתוח מקלורן הוא פיתוח טיילור סביב הנקודה 0, כלומר:

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots . \partial^{k_n} x_n} f(0) \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$$

תרגיל:

חשבו את פולינום טיילור של $f(x,y)=e^{x^2}\sin 2y$ סביב הנקודה $(0,0)$ עד סדר 5.

פתרון:

נזכור ש:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sin y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

עד סדר 5 נקבל:

$$e^{x^2}\approx 1+x^2+\frac{x^4}{2!} \qquad \sin 2y\approx 2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}$$

ולכן פולינום הטיילור יהיה:

$$e^{x^2}\sin 2y \approx \left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}\right)\left(2y-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}\right)$$

אנו רוצים עד סדר 5, ולכן נפתח את הביטוי ונעיף כל איבר מסדר גבוה יותר. האיברים שיעופו הם:

$$x^2\cdot\frac{(2y)^5}{5!},\ \frac{x^4}{2!}\cdot\left(-\frac{(2y)^3}{3!}\right),\ \frac{x^4}{2!}\cdot\frac{(2y)^5}{5!}$$

ולכן, פיתוח טיילור עד סדר 5 הוא:

$$e^{x^2}\sin 2y \approx 2y+2yx^2-\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{x^4}{2!}\cdot 2y-x^2\cdot\frac{(2y)^3}{3!}+\frac{(2y)^5}{5!}$$

תרגיל:

תהי $f(x,y)=e^{x^2y^3}$.

1. כתבו פיתוח טיילור של f סביב $(0,0)$ עד סדר 19.

פתרון:

שוב, נזכור את הפיתוח של e^x ונקבל עד סדר 19:

$$e^{x^2y^3}=1+x^2y^3+\frac{x^4y^6}{2!}+\frac{x^6y^9}{3!}$$

האיבר הבא יהיה כבר במעלה גבוהה מ-19.

2. עבור $f(x,y)=e^{x^2y^3}$

מהי $\frac{\partial f}{\partial x^8 \partial y^{11}}(0,0)$?

<u>פתרון:</u>

מכיוון שבפיתוח הטיילור שלנו אין איבר ממעלה 19, ובפרט האיבר x^8y^{11} לא נמצא,

ברור ש:

$$\frac{\partial f}{\partial x^8 \partial y^{11}}(0,0)=0$$

אמנם נוסחת הדיפרנציאל והנוסחה של טור טיילור, לוקחות בחשבון כמה פעמים חוזרת על עצמה כל נגזרת.
בכל זאת, איך מחשבים **כמה פעמים חוזרת כל נגזרת**?

אם הפונקציה היא של 2 משתנים, נעזר בבינום של ניוטון:

$$(a+b)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} a^k b^{r-k} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \frac{r!}{\alpha_1!\,\alpha_2!} a^{\alpha_1} b^{\alpha_2}$$

אם בפונקציה יש יותר משני משתנים, נעזר בבינום המוכלל:

$$(\alpha_1 + \cdots \alpha_n)^r = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_n=r} \frac{r!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

תרגיל:

חשבו כמה פעמים מופיעה הנגזרת:

$$\frac{\partial^{22} f}{\partial x^8 \partial y^{11} \partial^3 z}$$

פתרון:

$$116{,}396{,}280 = \frac{22!}{8!11!3!}$$

השארית

תזכורת- שארית לגראנז' במשתנה אחד

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

במספר משתנים:

$$R_{a,k}(h) = \sum_{k_1+\cdots+k_n=m+1} \frac{1}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!} \cdot \frac{\partial^{k_1} \ldots \partial^{k_n}}{\partial^{k_1} x_1 \ldots \partial^{k_n} x_n} f(a+ch) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{k_i}$$

תרגיל:

מצאו את פולינום טיילור סביב הנקודה $(1,0)$ עד סדר 2 עם שארית לגרנז' של
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

פתרון:

נחשב את כל הנגזרות החלקיות מסדר 0 ועד סדר 3, בנגזרות עד סדר 2 נציב את הנקודה $(1,0)$ בנגזרות מסדר 3 (שהן ישמשו לשארית לגרנז') - נציב את $(1+\theta(x-1),\theta y)$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad f_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\quad f_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

והפולינום טיילור בלי השארית עד סדר 2 סביב (1,0), כפי שכבר מצאנו:

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}y^2$$

בשביל שארית לגרנז' נחשב את הנגזרות מסדר 3

$$f_{xxx} = -3\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad f_{xxy} = \frac{2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$f_{xyy} = \frac{2x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad f_{yyy} = -3\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

נסמן

$$\theta_x = 1 + \theta(x-1), \quad \theta_y = \theta y$$

ונקבל ששארית לגרנז' היא:

$$\frac{1}{3!}(-3\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-\frac{3}{3!}\frac{\theta_x^2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

לכן הפולינום כולו עם השארית הוא:

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}(-\frac{\theta_x\theta_y^2}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}(x-1)^3+\frac{1}{2}(\frac{2\theta_y}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_y^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)^2y$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{2\theta_x}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{3}{2}}}-3\frac{\theta_x^3}{(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}})(x-1)y^2-\frac{\theta_x^2\theta_y}{2(\theta_x^2+\theta_y^2)^{\frac{5}{2}}}y^3)$$

שארית פיאנו:

כאשר נפתח את טור טיילור עד סדר m, השארית תהיה:

$$.R_{a,k} = o\left(\|x-a\|^m \quad\right)$$

תרגיל:

כתוב את פיתוח טיילור של $f(x,y)=sin(xe^y)$ סביב הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ עד סדר 2 עם שארית פיאנו.

פתרון:

נחשב נגזרות עד סדר 2:

$$f_x=\cos(xe^y)e^y, \quad f_y=\cos(xe^y)xe^y$$

$$f_{xx}=-e^{2y}\sin(xe^y), \quad f_{xy}=-\sin(xe^y)xe^{2y}+\cos(xe^y)e^y$$

$$f_{yy}=xe^y\cos(xe^y)-\sin(xe^y)x^2e^{2y}$$

נציב את הנקודה $(\frac{\pi}{2},0)$ ונקבל:

$$f(\frac{\pi}{2},0)=1$$

$$f_x(\frac{\pi}{2},0)=0,\quad f_y(\frac{\pi}{2},0)=0$$

$$f_{xx}(\frac{\pi}{2},0)=-1,\quad f_{xy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi}{2},\quad f_{yy}(\frac{\pi}{2},0)=-\frac{\pi^2}{4}$$

לכן הפולינום עד סדר 2 עם שארית פיאנו הוא:

$$f(x,y)=1+\frac{1}{2}(-(x-\frac{\pi}{2})^2-\frac{\pi}{2}(x-\frac{\pi}{2})y-\frac{\pi^2}{8}y^2)+o(||(x-\frac{\pi}{2},y)||^2)$$