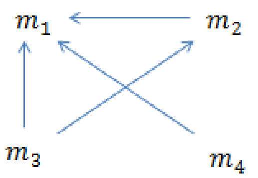
הרצאה XI- מכניקה

הבוחן הבא יערך בעוד כמה שבועות, ויהיה על חוקי ניוטון ותנע קווי.



תזכורת: $\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma F$ כאשר התנע הקווי נתון ע"י $\vec{p} = m\vec{v}$. זוהי הדרך המדוייקת והיעילה ביותר לכתיבת החוק השני של ניוטון. ההרצאה היום מתאימה לפרק השלישי בספר הקורס של קלפנר, נעסוק בהגדרת התנע, ונשתמש בדוגמאות על מנת להוכיח זאת. נביט בתרשים הבא, ארבעה מסות שמפעילים בינהם כוחות הדדים, וגם פועל על כל אחד מהם כח חיצוני שלא מסומן בסרטוט. נרשום את החוק השני של ניוטון עבור כל אחד מהם ונראה מה נקבל.

המשוואות: $\begin{cases} m_1\ddot{\vec{x}}_1 = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \vec{F}_{1,ext} \\ m_2\ddot{\vec{x}}_2 = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{2,4} + \vec{F}_{2,ext} \\ m_3\ddot{\vec{x}}_3 = \vec{F}_{3,1} + \vec{F}_{3,2} + \vec{F}_{3,4} + \vec{F}_{3,ext} \\ m_4\ddot{\vec{x}}_4 = \vec{F}_{4,1} + \vec{F}_{4,2} + \vec{F}_{4,3} + \vec{F}_{4,ext} \end{cases}$

נקבל כי: $\dot{\overrightarrow{P_{total}}} = \dot{\vec{P_1}} + \dot{\vec{P_2}} + \dot{\vec{P_3}} + \dot{\vec{P_4}} = F_{1.ext} + F_{2.ext} + F_{3,ext} + F_{4,ext}$. ניתן לראות כי הכוחות היחידים שמשפיעים על התנע הכולל הם הכוחות החיצוניים, אם נכליל נקבל $\dot{\overrightarrow{P_{total}}} = \sum_i F_{i,ext}$. נציב את המשוואות שפיתחנו ונקבל $m_1\ddot{\vec{x}}_1 + m_2\ddot{\vec{x}}_2 + m_3\ddot{\vec{x}}_3 + m_4\ddot{\vec{x}}_4 = F_{1.ext} + F_{2.ext} + F_{3,ext} + F_{4,ext}$.

נגדיר: $\frac{m_1\ddot{\vec{x}}_1+m_2\ddot{\vec{x}}_2+m_3\ddot{\vec{x}}_3+m_4\ddot{\vec{x}}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4} = M_{total}$, וע"פ הגדרת הנגזרת מתקיים $\frac{d^2}{dt^2}\frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+m_3\vec{x}_3+m_4\vec{x}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4} = M_{total}$ וקיבלנו

הגדרה למרכז המסה: $(CM = Center\ of\ Mass)$, $\overrightarrow{X_{CM}} = \frac{m_1\vec{x}_1+m_2\vec{x}_2+m_3\vec{x}_3+m_4\vec{x}_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}$. אפשר לרשום כעת את החוק השני של ניוטון מחדש ולקבל: $M_{total}\ddot{\overrightarrow{X_{CM}}} = \Sigma\vec{F}_{ext}$. אנו יודעים את המידע על מרכז המסה, כאשר זה בכל זאת נותן איזשהו מידע על המערכת. (דוגמא בעל פה של הטוש שבידי המרצה). ע"פ כל מה שפיתחנו, נקבל כי בהנחה ולא קיימים כוחות חיצוניים, מרכזי המסה של גופים יפלו בצורה אנכית.

נעבור לתרגיל טיפה יותר מורכב, בהמשך לתרגיל עם האסטרונאוטים לפני כמה הרצאות. הביטוי הקודם שקיבלנו ליחס בין התאוצות הינו: $\ddot{x}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\ddot{x}_2$.

נניח כי התנע הכולל קבוע, לכן נגזרתו (סכום הכוחות החיצוניים) אפס, ונקבל בדיוק את אותו הדבר. $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0$.

גם בתרגיל עם הטריז יכולנו להשתמש בנוסחאות שהרגע פיתחנו ולפשט את הבעיה.

תרגיל: שתי מסות על ציר הx מחוברות ע"י קפיץ. אנו רוצים לתאר את התנועה המתוארת בסרטוט.

פתרון: $X_{CM} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$, ההתחלתי הוא: $X_{CM}(t=0) = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}$, נבצע נגזרת, נקבל: $\dot{X}_{CM} = \frac{m_1\dot{x}_1+m_2\dot{x}_2}{m_1+m_2}$, ואז נבנה את המשוואות $\frac{m_1v_0}{m_1+m_2} = \dot{X}_{CM}(t) = \dot{X}_{CM}(t=0)$. נציב ונקבל: $X_{CM}(t) = \frac{m_2 l}{m_1+m_2} + \frac{m_1v_0}{m_1+m_2}t$. משוואה כללית למיקום המערכת. נעשה אותו גבר עבור הy ונקבל: $-\frac{m_1}{m_2}y_1 = \frac{(x_2-x_1)m_1}{m_1+m_2} = \vec{x}_1 - \overrightarrow{x_{CM}} = \vec{y}_1$, ועבור $\vec{y}_1 = \frac{(x_1-x_2)m_1}{m_1+m_2}$,

כעת נחפש $\vec{y}_1(0) = -\frac{lm_2}{m_1+m_2}$, וגם $\dot{\vec{y}}_1(0) = \frac{v_0m_2}{m_1+m_2}$.

חוק הוק : כח של קפיץ פרופורציונאלי לאורכו, זהו חוק מקורב , אמפירי שמנוסח ע"י $F = -k\Delta X$. כמובן שאינו עובד במקרי מקסימום- החוט נקרע, או מגיע למקסימום אורכו , ואפילו לפני החוק מפסיק כבר לעבוד. כעת חוק זה מספיק לנו ונשתמש בו.

נפתח כדי לקבל $\vec{F}_{1,2} = k(x_2 - x_1 - l)\hat{x} = k\left(-y_1\frac{m_1+m_2}{m_2} - l\right) = m_1\ddot{y}_1$.

וקיבלנו : $\ddot{y}_1 m_1 = -k\frac{m_1+m_2}{m_2}\underbrace{\left[y_1 + \frac{lm_2}{m_1+m_2}\right]}_{\equiv Z}$, ויש לנו משוואה דיפרנציאלית מסוג : $\ddot{Z} = -k\frac{m_1+m_2}{m_2}Z$. נגדיר את Z

בדרך הבאה $Z = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$ ונמשיך את הבעיה בהרצאה הבאה.