טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 5

שאלה 1

תהי A טבעת, כלומר $A=S^1\times I$. הראה ש- $S^1\times\{\frac{1}{2}\}\subseteq A$ הוא נסג עיוותי.

הוכחה:

נגדיר פונקציה $H: A\times I \longrightarrow A$ ע"י

$$H((x,s),t):=(x,\tfrac{1}{2}t+(1-t)s)$$

H רציפה, כי היא רציפה בכל רכיב. כמו כן:

א. לכל $(x,s)\in A$, $H((x,s),0)=(x,s)$

$H((x,s),1)=(x,\frac{1}{2})\in S^1\times\{\frac{1}{2}\}$

ב. לכל $(x,\frac{1}{2})\in S^1\times\{\frac{1}{2}\}$ ולכל $t\in I$, $H((x,\frac{1}{2}),t)=(x,\frac{1}{2}t+(1-t)\cdot\frac{1}{2})=(x,\frac{1}{2})$.

לכן $S^1\times\{\frac{1}{2}\}$ נסג עיוותי של A.

שאלה 2

תהי M טבעת מוביוס, כלומר מרחב המנה של $I\times I$ המתקבל מההדבקה $(0,t)\sim(1,1-t)$, לכל $t\in I$. אם $p: I\times I \longrightarrow M$ העתקת המנה, נסמן $S=p(I\times\{\frac{1}{2}\})\subseteq M$.

א. הראה ש-S הוא מעגל.

<u>הוכחה:</u>

p מדביקה את הקצוות של $I\times\{\frac{1}{2}\}$ ואת השאר לא משנה, כלומר מקבלים את מרחב המנה של $I\times\{\frac{1}{2}\}$ תחת זיהוי הקצוות, ולכן זה מעגל.

ב. הראה ש-S נסג עיוותי של M.

<u>הוכחה:</u>

ראשית, נראה ש-$I\times\{\frac{1}{2}\}$ הוא נסג עיוותי של $I\times I$.

נגדיר $H:(I\times I)\times I \longrightarrow I\times I$ ע"י $H((s,p),t):=(s,\frac{1}{2}t+p(1-t))$.

H רציפה, כי היא רציפה בכל רכיב, ולכל $(s,p)\in I\times I$,

$$H((s,p),0)=(s,p) \quad ; \quad H((s,p),1)=(s,\tfrac{1}{2})\in I\times\{\tfrac{1}{2}\}$$

כמו כן, לכל $(s,\frac{1}{2})\in I\times\{\frac{1}{2}\}$, $H((s,\frac{1}{2}),t)=(s,\frac{1}{2})$, כנדרש.

כעת, נראה ש-H מכבדת את יחס השקילות שהגדרנו. לכל $p,t\in I$ מתקיים:

$$H((0,p),t)=(0,\tfrac{1}{2}t+p(1-t))=(0,p-pt+\tfrac{1}{2}t)\sim(1,1-p+pt-\tfrac{1}{2}t)=$$

$$=(1,\tfrac{1}{2}t+1-p+pt-t)=(1,\tfrac{1}{2}t+(1-p)(1-t))=H((1,1-p),t)$$

לפי משפט שנדבר עליו באחת ההרצאות הקרובות, H משרה את ההומוטופיה הנדרשת $\hat{H}: M\times I \longrightarrow M$.

שאלה 3

הראה ש- $S^1\times\{a\}\subseteq S^1\times S^1$ הוא נסג, אך לא נסג עוותי.

הוכחה:

ראשית, נראה שזהו נסג. נגדיר $r:S^1\times S^1\longrightarrow S^1\times\{a\}$ ע"י $r(x,y)=(x,a)$.

r רציפה (למשל, רציפה בכל רכיב כהטלה או כפונקציה קבועה).

כמו כן, לכל $(x,a)\in S^1\times\{a\}$, $r(x,a)=(x,a)$.

אילו $S^1\times\{a\}$ היה נסג עוותי, $i_*:\pi_1(S^1\times\{a\},(b,a))\longrightarrow\pi_1(S^1\times S^1,(b,a))$.

לפי תרגיל בית 4, $\pi_1(S^1\times\{a\},(b,a))\cong\mathbb{Z}\times\{1\}=\mathbb{Z}$

$\pi_1(S^1\times S^1,(b,a))\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

והן לא איזומורפיות.

שאלה 4

הראה ש- $S^1\times\partial D^2\subseteq S^1\times D^2$ אינו נסג.

פתרון:

$\partial D^2=S^1$, ולכן $\pi_1(S^1,a)=\pi_1(\partial D^2,a)=\mathbb{Z}$.

D^2 פשוט קשר, כי הוא קמור; לכן $\pi_1(D^2,a)=\{1\}$.

נניח בשלילה ש- $S^1\times\partial D^2$ נסג של D^2; אז $i:S^1\times\partial D^2\longrightarrow S^1\times D^2$ העתקת ההכלה,

אז: $i_*:\pi_1(S^1\times\partial D^2,(a,b))\longrightarrow\pi_1(S^1\times D^2,(a,b))$ חד-חד ערכית (לפי משפט מההרצאה).

נוכל לחשב את החבורות הנ"ל לפי תרגיל בית 4:

$$\pi_1(S^1\times\partial D^2,(a,b))\cong\pi_1(S^1,a)\times\pi_1(\partial D^2,b)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

$$\pi_1(S^1\times D^2,(a,b))\cong\pi_1(S^1,a)\times\pi_1(D^2,b)\cong\mathbb{Z}$$

כלומר $i_*:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ מונומורפיזם של חבורות.

לפי כך, $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ איזומורפית לתת-חבורה של $\mathbb{Z}$. אבל כל תת-חבורה של $\mathbb{Z}$ היא ציקלית, ו $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ אינה ציקלית, בסתירה.

שאלה 5

יהי $\varphi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ ההומומורפיזם הנתון ע"י $\varphi(n)=2n$.

הראה שלא קיים הומומורפיזם $\psi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ כך ש- $\psi\circ\varphi=Id_{\mathbb{Z}}$.

הוכחה:

נניח בשלילה ש- $\psi:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}$ הומומורפיזם שעבורו $\psi\circ\varphi=Id_{\mathbb{Z}}$.

בפרט, $\psi(\varphi(1))=\psi(2)=1$. אבל $\psi(2)=\psi(1)+\psi(1)$,

כלומר $2\cdot\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{\psi(1)}}=1$, וזה לא ייתכן.

קיבלנו סתירה, ולכן לא קיים הומומורפיזם כזה.