~~שאלה~~ 2

① סווגו את המשטח הבא.

$$x+2x^2-y+4xy+2y^2-2xz-2yz+5z^2=0$$

<u>פתרון:</u>

נרשום את המשטח בצורה (בתור):

$$(x\ y\ z)\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+(g\ h\ i)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+M=0$$

המטריצה היא מטריצה סימטרית.

במקרה שלנו

$$a=2 \qquad 2b=4 \rightarrow b=2$$
$$d=2 \qquad 2c=-2 \rightarrow c=-1$$
$$2e=-2 \rightarrow e=-1 \qquad f=5$$
$$g=1 \qquad h=-1$$

ולכן המטריצה A המתאימה

$$(x\ y\ z)\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+(1\ -1\ 0)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+0=0$$

[illegible]

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\left[(2-\lambda)(5-\lambda)-1\right]-2\left[2(5-\lambda)-1\right]-1\left[-2+(2-\lambda)\right]$$

$$= \quad = \quad \lambda(\lambda-6)(\lambda-3)=0$$

לכל ערך נמצא את הוקטור המתאימים לו

עבור $\lambda=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

קבלנו ש $c=0$

ולכן הוקטור $(1,-1,0)$ ומנורמל

$$v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

③

באופן דומה עבור $\lambda=3$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

דירוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3\to R_3+R_1 \\ R_2\to R_2-2R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$b=1 \quad c=1$

$$a-2+1=0$$
$$\Downarrow$$
$$a=1$$

ולכן הוקטור העצמי ((מנורמל))

$$V_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

באופן דומה עבור $\lambda=6$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{החלפת שורות}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(4)

כלומר אם $c=-2$ $b=1$

ולפי המשוואה השלישית $a+1-2=0$

$$\Downarrow$$

$$a=1$$

ולכן הו"ע המנורמל הוא

$$V_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\\ \frac{1}{\sqrt6}\\ -\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$$

המטריצה המלכסנת מעבר מנורמלים

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

$$(x\ \ y\ \ z)\ P^t \overset{PAP^t}{\overbrace{D}} P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+(1\ \ -1\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$$P^t\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\Longleftarrow \underbrace{(x\ \ y\ \ z)P^t}_{\text{מין וקטור } 1\times 3}=(x',y',z')$$

$P^t=P^{-1}$ ~~מאונכת~~

לכן:

$$(x'\ \ y'\ \ z')\,D\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+(1\ \ -1\ \ 0)\,P^t\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

לכן

$$(x'\ \ y'\ \ z')\begin{pmatrix}0&0&0\\0&6&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+(1\ \ -1\ \ 0)\begin{pmatrix}x'+y'-2z'\end{pmatrix}$$

פרבולואיד ? [illegible] $\Longleftarrow$ $6\tilde{y}^2+3\tilde{z}^2+\frac{2}{\sqrt2}\tilde{x}=0$

שאלה.

מטריצת המטריקה של יריעה נתונה ע"י

$$g=\begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}$$

מצא וקטור המאונך לוקטור $r_u - r_v$

פתרון:

$$\langle r_u, r_u\rangle = e^u \qquad \langle r_v, r_v\rangle = e^v$$

$$\langle r_u, r_v\rangle = 0$$

מאחר ונמצא במישור המשיק המאונך, הוא הוי קומבינציה לינארית של r_u ו-r_v

כלומר,

$$\langle Ar_u + Br_v, r_u - r_v\rangle = 0$$

$$\langle Ar_u, r_u - r_v\rangle + \langle Br_v, r_u - r_v\rangle$$

$$= A\langle r_u, r_u\rangle - B\langle r_v, r_v\rangle\ 0$$

$$\langle r_u, r_v\rangle = 0$$

$$Ae^u - B\cdot e^v = 0 \Rightarrow Ae^u = Be^v$$

$$b = ae^{u-v} \Leftarrow A = Be^{v-u}$$

$$1 = \|Ar_u + Ae^{u-v}r_v\|^2 = A^2e^u + A^2e^{2u-2v}e^v$$

מכפלה פנימית

ולכן

$$a = \left(e^u + e^{2u-v}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

נניח הגדרה

וקיבל השגה המאונך.

שאלה 5

יהי: $\gamma(s)$ עקום נתון ע״י רגול (רגול וכבר פרמטרי מקצב)
בפרמטריזציה טבעית ב־$\mathbb{R}^2$ שמקיימת $k(s)\le 1$ לכל s

הוכח:

א) לכל $s\in[0,\frac{\pi}{2})$

$$\langle \dot\gamma(s_1),\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4})\rangle \geq \frac{1}{\sqrt2}$$

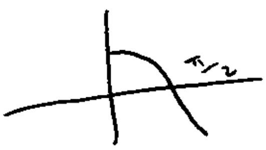
ב)

$$d\left(\gamma(0),\gamma(\tfrac{\pi}{2})\right)\geq \frac{\pi}{2\sqrt2}$$

פתרון

א) לפי הגדרה

$$\langle \dot\gamma(s_1),\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4})\rangle = \|\dot\gamma(s_1)\|\,\|\dot\gamma(s_2)\|\cdot \cos(\dot\gamma(s_1)-\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4}))$$
$$=\cos(\dot\gamma(s_1)-\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4}))$$



נסמן זווית בין שני המשיקים $\dot\gamma$: $\alpha(s_1)-\alpha(s_2)$

כאשר לפיכן לפי גרף:

$$\cos(\alpha(s)-\alpha(\tfrac{\pi}{4}))\geq \frac{1}{\sqrt2}$$

המשוואה הזו מתקיימת.

$$\Updownarrow$$

$$\alpha'(s)\geq \frac{\pi}{4}(s-\tfrac{\pi}{4}) \Leftarrow \alpha(s)-\alpha(\tfrac{\pi}{4})\geq\frac{\pi}{4}$$

$$\Updownarrow \quad \uparrow \quad \alpha(s)-\alpha(\tfrac{\pi}{4})\geq s-\tfrac{\pi}{4}$$

$$\frac{\alpha(s)-\alpha(\frac{\pi}{4})}{s-\frac{\pi}{4}}=\alpha'(s)=|k|\leq 1$$

ולכן אם נשים את,

ב)

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4})\cdot\dot\gamma(s)\,ds\right|$$

$$=\|\dot\gamma(\tfrac{\pi}{4})\|\,\|\gamma(\tfrac{\pi}{2})-\gamma(0)\| =$$

$$\|\gamma(\tfrac{\pi}{2})-\gamma(0)\| \geq \frac{\pi}{2\sqrt2}$$

מצד שני, לפי א׳ כ.ש. ואינטגרל בפונקציה מונוטונית מקבלים