פתרון תרגיל 5 גיאומטריה תשע"ז

1. נמצא את נקודות הקיצון והפיתול ונחשב את העקמומיות.

(א) לפונקציה אין נקודות קיצון. יש לה נקודת פיתול בנקודה $(0,0)$. נסמן: $F(x,y)=x^3-y=0$.
הנגזרות הן:

$$F_x=3x^2, F_y=-1$$

$$F_{xx}=6x, F_{xy}=0, F_{yy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|6x\cdot(-1)^2+0+0\right|}{\left((3x^2)^2+(-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{|6x|}{(9x^4+1)^{\frac{3}{2}}}$$

ובנקודת הפיתול $k=0$.

(ב) אם נגזור ונשווה ל-0 נקבל: $4x^3-1=0$, כלומר $x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ והנקודה היא $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}},-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\right)$.
נסמן: $F(x,y)=x^4-x-y$. הנגזרות הן:

$$F_x=4x^3-1, F_y=-1$$

$$F_{xx}=12x^2, F_{xy}=0, F_{yy}=0$$

ולכן:

$$k=\frac{\left|12x^2\cdot(-1)^2+0+0\right|}{\left((4x^3-1)^2+(-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{12x^2}{\left((4x^3-1)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ובנקודה שלנו $k=\frac{12}{\sqrt[3]{16}}$.
אם נגזור שנית ונשווה ל-0 נקבל: $12x^2=0$ והנקודה היא $(0,0)$ אך זו אינה נקודת פיתול.

2. נזכור שכל רכיב קשירות שהוא עקומת ז'ורדן קמורה מוסיף לעקמומיות הכוללת 2π.

(א) כל אחת מהמשוואות מתארת מעגל עם רדיוס $\frac{1}{\sqrt{k}}$ ומרכז בראשית. המעגלים זרים ולכן העקמומיות הכוללת היא $2\pi n$.

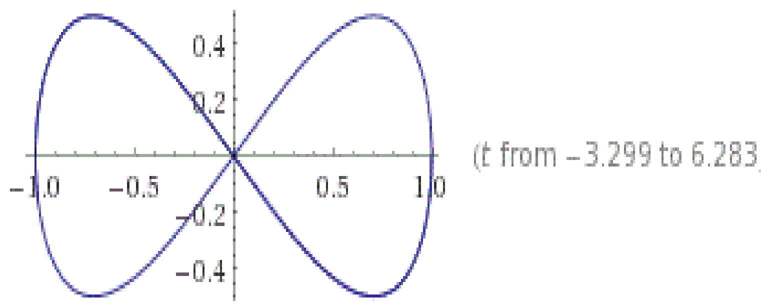
(ב) העקומה היא קרדיואדה, והעקמומיות הכוללת היא 2π.

(ג) העקומה היא אסטרואידה ואנו עוברים עליה שלוש פעמים, ולכן העקמומיות הכוללת היא 6π.

3. וקטור הנגזרות הוא:

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos 2t)$$

הנורמה שונה מ-1 ולכן הפרמטריזציה אינה במהירות יחידה.
האינטגרל שווה לאפס (נסו להשתמש בזהויות ולהציב $t = \sin x$, למשל). העקומה נראית כך:



אם נתבונן בוקטור משיק ובשינוי שלו לאורך העקומה, נראה שבסך הכל הזווית לא השתנתה לאחר סיבוב שלם סביב העקומה.